

EINIGE GLOBALE EIGENSCHAFTEN
DER KONFORMEN TRANSFORMATIONEN

Dieter H. Mayer

1971



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553801_0009

EINIGE GLOBALE EIGENSCHAFTEN
DER KONFORMEN TRANSFORMATIONEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Dieter H. Mayer

September 1971



1. Berichterstatter: Prof. Dr. H.A. Kastrup

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Dezember 1971

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung und Zusammenfassung	1
1. Die Struktur der Menge der Ereignisse und der Menge der Maßstäbe	5
1.1. Der Raum M_4^E der physikalischen Ereignisse	6
1.2. Der Raum B der Maßstäbe	8
2. Die Wirkung der Poincare Gruppe $P_{10}[\wedge, a]$ auf M_4^E und B	13
3. Eichtransformationen in der Menge B der Maßstäbe und im Raum M_4^E der Ereignisse	15
3.1. Die Gruppe der Dilatationen	15
3.2. Die speziellen konformen Transformationen	18
4. Die Mannigfaltigkeit $K^5(E, b)$ der Ereignisse E und Maßstäbe b und der Raum M_C^4	21
5. Einige topologische Eigenschaften der Räume $K^5(E, b)$ und M_C^4	30
5.1. Die Mannigfaltigkeit $K^5(E, b)$ bzw. Q_0^5 als homogener Raum	35
5.2. Die Mannigfaltigkeit M_C^4 bzw. Q_0^5/A als homogener Raum	37
6. Das Problem der Kausalität in einer konforminvarianten Welt	39
6.1. Die Tangentialräume $T_q(Q_0^5)$ und die Kotangentialräume $T_q^*(Q_0^5)$	39
6.2. Die Tangentialräume $T_{[q]}(Q_0^5/A)$	41
7. Die Klein-Gordon Gleichung auf der Mannigfaltigkeit M_C^4	45
7.1. Die Fortsetzbarkeit von Funktionen im $\mathbb{R}_1^4$ auf die Mannigfaltigkeit Q_0^5/A	47

7.2. Die Fortsetzbarkeit des Operators $\frac{\partial}{\partial x^j}$ auf den Raum Q_0^5/A	49
7.3. Der Klein-Gordon Operator auf Q_0^5/A	51
Anhang A	54
Anhang B	57
Anhang C	59
Anhang D	60
Literaturverzeichnis	61

O. Einleitung und Zusammenfassung

In den letzten Jahren hat die Gruppe der konformen Transformationen zunehmendes Interesse in der Physik gefunden ¹⁾⁻⁵⁾, ohne daß bis heute ihre wahre Bedeutung, und hier vor allem die der endlichen speziellen konformen Transformationen, voll verstanden ist. So gibt es einen grundsätzlichen Unterschied in der Anwendung der einzelnen Untergruppen der Konformen Gruppe. Während die Poincare-Transformationen als Transformationen von Raum und Zeit betrachtet werden, finden die infinitesimalen Skalentransformationen sowie die infinitesimalen speziellen konformen Transformationen bisher nur Anwendung als Transformationen von Feldern ⁶⁾. Die endlichen speziellen konformen Transformationen wiederum gelten bis heute für die Physik als irrelevant ⁷⁾.

Mit Hilfe skalener- bzw. konforminvarianter effektiver Lagrangefunktionen ⁶⁾⁸⁾ bzw. mit Hilfe der Ward-Takahashi Identitäten konnten verschiedene Niederenergie-Theoreme abgeleitet werden ⁹⁾. Es zeigte sich auch, daß unter bestimmten Voraussetzungen, die z.B. von allen bekannten renormierbaren Feldtheorien erfüllt werden, die Divergenz der konformen Ströme der Divergenz des Dilatationsstromes direkt proportional ist ⁷⁾¹⁰⁾⁻¹²⁾, d.h., daß die Brechung der Skaleninvarianz von der gleichen Art ist wie die Brechung der Invarianz unter den speziellen konformen Transformationen.

Eine besonders interessante Anwendung der Skalentransformationen in der Hochenergiephysik ¹³⁾ ist die von K. Wilson ¹⁴⁾ eingeführte Operatorproduktentwicklung zweier Felder in einem Punkt. Die Annahme exakter Skaleninvarianz führt zu einer explizit ersichtlichen Singularitätenstruktur von solchen Operatorprodukten.

Mehrere Autoren ¹⁵⁾⁻¹⁷⁾ haben in der Zwischenzeit diese Wilson-Entwicklung zu einer Operatorproduktentwicklung auf dem gesamten Lichtkegel erweitert. Es hat sich nämlich gezeigt, daß das Hochenergieverhalten verschiedener Prozesse ¹⁸⁾⁻²¹⁾ nicht nur durch die Singularität eines Produktes zweier Felder im Nullpunkt, sondern durch das Verhalten des Produktes auf dem gesamten Lichtkegel bestimmt wird. Die ersten Vergleiche dieser Hypothesen mit den Experimenten sind einigermaßen ermutigend.

Bei all den obigen Anwendungen in der Hochenergiephysik wurde bis jetzt nur von den Skalentransformationen Gebrauch gemacht. Dies ist insofern erstaunlich, als gerade die endlichen speziellen konformen Transformationen ebenfalls auf dem Lichtkegel eine besondere Rolle spielen: sie besitzen nämlich dort Singularitäten. Dies andererseits scheint aber einer der Hauptgründe dafür zu sein, daß man die endlichen speziellen konformen Transformationen ziemlich unbeachtet gelassen hat.

In dieser Arbeit wird nun der Versuch unternommen, eine einheitliche Behandlung der gesamten 15-parametrischen Gruppe der konformen Transformationen zu ermöglichen. Dies erreichen wir durch die Einbettung des Minkowski-Raums M_4 in eine kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit M_C^4 , auf der alle konformen Transformationen als stetige Abbildungen wirken. Damit wird der genauen Analyse der Bedeutung gerade auch der speziellen konformen Transformationen in der Physik eine neue Grundlage gegeben.

Die Interpretation der gesamten konformen Transformationen als Transformationen der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit M_C^4 führt uns sofort zu dem viel diskutierten Problem der Kausalität in einer konforminvarianten Welt ¹⁾²²⁾⁻²⁶⁾. Es werden ja z.B. im Minkowski-Raum M_4 zeitartige Vektoren unter speziellen konformen Transformationen in raumartige abgebildet und umgekehrt. Benutzung einfachster Eigenschaften der Tangential- und Kotangentialräume der Mannigfaltigkeit M_C^4 gestattet es auch dieses Problem zu lösen. Es zeigt sich dabei ²⁷⁾, daß diese Überlegungen Verallgemeinerungen von Formulierungen sind, die im Falle des Minkowski-Raums M_4 auf Grund seiner Vektorraumstruktur besonders einfach sind.

Ein weiteres Problem, das sich mit der Einbettung des Minkowski-Raums M_4 in die größere Mannigfaltigkeit M_C^4 ergibt, ist die Fortsetzbarkeit der im Minkowski-Raum benutzten Beschreibung physikalischer Ereignisse auf die gesamte Mannigfaltigkeit M_C^4 . Dazu ist es nötig, einige mathematische Methoden, deren Anwendungen in Vektorräumen wohl bekannt sind, auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern. In dieser Arbeit wollen wir uns auf die Fortsetzbarkeit von Funktionen sowie von Differentialoperatoren beschränken. Besonders interessant für eine

Feldtheorie auf der Mannigfaltigkeit M_C^4 ist dann natürlich die Einführung von Feldoperatoren. Dieses Problem soll hier jedoch nicht behandelt werden.

Unsere Betrachtungen zeigen insbesondere, daß die klassische Beschreibung physikalischer Ereignisse z.B. mit Hilfe von Differentialgleichungen, wie der Klein-Gordon Gleichung, in natürlicher Weise vom Minkowski-Raum M_4 auf die Mannigfaltigkeit M_C^4 fortgesetzt werden kann. Im Einzelnen ist die Arbeit wie folgt aufgebaut:

Im Kapitel 1 wird zunächst die Konforme Gruppe im gewöhnlichen Minkowski-Raum M_4 eingeführt. Dann analysieren wir die Struktur der Menge M_4^E der physikalischen Ereignisse $\{E\}$ und der Menge B der physikalischen Maßstäbe $\{b\}$, denn wir wollen die konformen Transformationen gerade als Umeichungen dieser Maßstäbe betrachten. Es werden ferner Begriffe eingeführt, die für das weitere Verständnis der Konstruktion der Mannigfaltigkeit M_C^4 sowie der Interpretation der Wirkung der Gruppe der konformen Transformationen auf dem kompaktifizierten Minkowski-Raum M_C^4 von entscheidender Bedeutung sind.

Besonders eingehend diskutieren wir den Prozess des klassischen Ausmessens von Ereignissen mittels Maßstäben im flachen Minkowski-Raum M_4 und die mathematische Beschreibung dieses Prozesses mittels verschiedener Abbildungen in gewissen dem Raum der Ereignisse in natürlicher Weise zugeordneten Räumen. Es soll schon hier betont werden, daß die quantenmechanische Problematik des Meßprozesses hier in dieser Arbeit nicht betrachtet werden soll.

Die im euklidischen Minkowski-Raum ziemlich trivial erscheinenden Verhältnisse bekommen ihre wahre Bedeutung erst bei Betrachtung des erweiterten Minkowski-Raums M_C^4 und der ebenfalls später einzuführenden Mannigfaltigkeit $K^5(E, b)$ von Ereignissen E und Maßstäben b .

Im Kapitel 2 betrachten wir die bekannte Wirkung der Poincare-Gruppe im Raum M_4^E der Ereignisse E bzw. im Raum B der Maßstäbe b . Diese Überlegungen führen uns dazu, im Kapitel 3 allgemeine Eichtransformationen in den Räumen M_4^E und B einzuführen.

Nach dieser Vorarbeit sind wir schließlich dann im Kapitel 4 soweit, die schon öfters zitierten Mannigfaltigkeiten $K^5(E, b)$ der Ereignisse E und der Maßstäbe b und M_C^4 von Raum und Zeit, die

Kompaktifizierung des Minkowski-Raums M_4 , einzuführen.

Im Kapitel 5 soll die topologische Struktur dieser Mannigfaltigkeiten als homogener Räume und damit verbunden auch einige Eigenschaften der konformen Transformationen auf diesen Räumen behandelt werden.

Im Kapitel 6 beschreiben wir kurz einige Eigenschaften der Tangential- und Kotangentialräume der Mannigfaltigkeiten $K^5(E, b)$ und M_C^4 , die bei der Behandlung des Problems der Kausalität in einer konforminvarianten Welt von Bedeutung sind. Besonders wird dabei von der bemerkenswerten topologischen Eigenschaft der Parallelisierbarkeit unserer Mannigfaltigkeit M_C^4 Gebrauch gemacht.

Wir berichten ferner über entsprechende Ergebnisse einer Untersuchung des Kausalitätsproblems in diesem hier geschilderten Rahmen, die von Herrn T.H. Go in seiner Dissertation ²⁷⁾ durchgeführt wurden: man hat lokal in einer konforminvarianten Welt die gleiche kausale Struktur wie in einer poincareinvarianten Welt, global besitzen jedoch nur lichtartig zu einander gelegene Ereignisse eine solche Struktur.

Im Kapitel 7 wird die Frage der Fortsetzbarkeit von ursprünglich nur auf dem Minkowski-Raum definierten Funktionen auf die erweiterte Mannigfaltigkeit M_C^4 diskutiert. Es zeigt sich, daß diese möglich ist, wenn nur die Funktionen im Minkowski-Raum M_4 bestimmte Grenzprozesse zulassen.

Im Kapitel 8 schließlich untersuchen wir dasselbe Problem der Fortsetzbarkeit von zunächst nur im Minkowski-Raum definierten Differentialoperatoren auf die gesamte Mannigfaltigkeit M_C^4 . Insbesondere zeigen wir, daß der Klein-Gordon Operator eine eindeutige Fortsetzung auf den kompaktifizierten Minkowski-Raum M_C^4 besitzt.

Wir geben auch eine Klasse von Lösungen der auf die Mannigfaltigkeit M_C^4 verallgemeinerten Klein-Gordon Gleichung zur Masse $m = 0$ an.

Um die mathematische Sprache der Arbeit besser verstehen zu können, werden in mehreren Anhängen verschiedene Definitionen sowie bekannte mathematische Sätze und Theoreme aus der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zusammengestellt. Diese werden ohne Beweis aus gängigen mathematischen Standardwerken übernommen, auf die im Einzelfall dann hingewiesen wird.

1. Die Struktur der Menge der Ereignisse und der Menge der Maßstäbe

Im Minkowski-Raum M_4 mit der Metrik g^{ij} , wobei
 $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$, $g^{ij} = 0$ für $i \neq j$, $i, j = 0, 1, 2, 3$,

verstehen wir unter der 15-parametrischen Konformen Gruppe die folgenden Transformationen:

die 10-parametrische Gruppe $P_{10}[\Lambda, a]$ der Poincare Transformationen

$$P_{10}(\Lambda, a) : x \mapsto \Lambda x + a, \quad (1)$$

die 1-parametrische Gruppe $D_1[\xi]$ der Dilatationen

$$D_1(\xi) : x \mapsto \xi x, \quad \xi > 0, \quad (2)$$

die 4-parametrische Gruppe $C_4[c]$ der speziellen konformen Transformationen

$$C_4(c) : x \mapsto (x - c x^j x_j) / \zeta(x, c) \quad (3)$$

wobei $\zeta(x, c) = 1 - 2 c^j x_j + c^j c_j x^1 x_1$ und für zwei beliebige Elemente $x, y \in M_4$ gilt:

$$x \cdot y = x^j y_j = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}. \quad (4)$$

Wir sehen sofort aus (3), daß die speziellen konformen Transformationen $C_4(c)$ nicht im gesamten Minkowski-Raum M_4 definiert sind, denn (3) ist nicht mehr definiert, sobald $\zeta(x, c) = 0$ wird. Betrachten wir aber die infinitesimalen konformen Transformationen, insbesondere die infinitesimalen speziellen konformen

$$x \mapsto x - c x^j x_j + 2 x c^j x_j, \quad (5)$$

so erhält man auf dem gesamten Minkowski-Raum wohl definierte Transformationen von Raum und Zeit. Auf Grund dieser Eigenschaft glaubte man bisher, falls den speziellen konformen Transformationen überhaupt irgendeine Bedeutung in der Physik zukommt, diese nur bezüglich der infinitesimalen Transformationen in (5) gemeint sein kann. So vertreten viele Autoren die Ansicht, es sei nicht nützlich, die speziellen konformen Transformationen als Abbildungen in Raum und Zeit zu betrachten, vielmehr müsse die Konforme

Gruppe als Gruppe von Transformationen von Feldern angeschaut werden. So erschöpfen sich auch alle Anwendungen der Konformen Gruppe in ihrer Wirkung auf Felder.

Obige Meinung wird in dieser Arbeit hier nicht vertreten, einfach deshalb, weil man die erwähnte Schwierigkeit mit den Singularitäten der speziellen konformen Transformationen leicht dadurch überwinden kann, daß man den Minkowski-Raum M_4 kompaktifiziert und in dem so gewonnenen kompakten Raum M_C^4 dann die gesamte Konforme Gruppe als überall definierte Transformationsgruppe hat. Dieses Problem soll nun in diesem und den nächsten Kapiteln behandelt werden.

Zunächst sollen in einer mathematisch exakten Weise diejenigen Operationen beschrieben werden, die mit dem Ausmessen physikalischer Ereignisse im Minkowski-Raum mit Hilfe gewisser Maßstäbe verbunden sind. Ausgehend von dieser Beschreibung wird man dann sofort zu einer Interpretation der konformen Transformationen als Eichtransformationen oder Umeichungen von Maßstäben geführt.

Die physikalischen Systeme, die wir betrachten wollen, enthalten unter anderem "Ereignisse" und "Maßstäbe". Ein Ereignis wird z.B. gegeben durch den Ort in Raum und Zeit, an dem ein π -Meson in ein μ -Meson und ein Antineutrino $\bar{\nu}$ zerfällt. Ein "Maßstab", mit dem dieses Ereignis ausgemessen wird, ist z.B. das "Urmeter" in Paris, oder was in diesem obigen Beispiel angemessener erscheint, die Comptonwellenlänge irgendeines Elektrons. Betrachten wir zunächst den Raum aller physikalischen Ereignisse.

1.1. Der Raum M_4^E der physikalischen Ereignisse

Wenn wir die Krümmung von Raum und Zeit durch schwere Massen vernachlässigen, so soll der Raum $M_4^E = \{E\}$ der Ereignisse E eine 4-dimensionale pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit sein, d.h. es wird angenommen, es gibt einen Homeomorphismus φ zwischen dem Raum $M_4^E = \{E\}$ und dem pseudoeuklidischen Vektorraum

$$\mathbb{R}_1^4 = \left\{ x = (x^0, x^1, x^2, x^3), x^i \in \mathbb{R} \forall i=0,1,2,3 \right\} \quad \text{mit der Metrik}$$

$$g(x, y) = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}. \quad (1)$$

Dieser Homeomorphismus gibt uns gerade die mathematische Beschreibung des physikalischen Geschehens. Da diese Beschreibung sicher nicht eindeutig bestimmt ist, ist auch der oben erwähnte Homeomorphismus φ nicht eindeutig bestimmt, und es ist daher die Aufgabe gestellt, eine der vielen möglichen mathematischen Beschreibungen explizit anzugeben.

Die Art und Weise, wie wir hier den Homeomorphismus φ konstruieren, scheint auf den ersten Blick nicht recht motiviert und vor allem zu umständlich zu sein, für unsere späteren Überlegungen im Zusammenhang mit der Frage der Kausalität auf dem erweiterten Minkowski-Raum bringt sie aber viele Vorteile mit sich, wie im Einzelnen noch ersichtlich werden wird.

Wir betrachten zunächst einen beliebigen Punkt $x \in \mathbb{R}_1^4$, und den zu diesem Punkt gehörigen Tangentialraum $T_x(\mathbb{R}_1^4)$. Dieser Raum ist, wie wohl bekannt ist, ein linearer Vektorraum. In unserem speziellen Fall des pseudoeuklidischen Vektorraums $\mathbb{R}_1^4$ ist $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ sogar isomorph zu $\mathbb{R}_1^4$, so daß es zunächst egal ist, ob wir den Tangentialraum $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ oder den Raum $\mathbb{R}_1^4$ selbst betrachten. Sei nun $\tilde{\phi}_x$ die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_x : T_x(\mathbb{R}_1^4) &\longrightarrow \mathbb{R}_1^4 \quad \text{definiert durch} \\ \tilde{\phi}_x : t_x = a^j \frac{\partial}{\partial x^j} &\longmapsto x + a = (x^0 + a^0, x^1 + a^1, \dots, x^3 + a^3). \end{aligned} \quad (7)$$

Die Abbildung $\tilde{\phi}_x$, definiert in (7), ist, falls $\mathbb{R}_1^4$ und $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ mit der Normtopologie versehen sind, ein Diffeomorphismus, der nur vom Punkt x abhängt. Wir bezeichnen die Abbildung $\tilde{\phi}_{x=0}$ einfach mit $\tilde{\phi}$. Dann ist $\tilde{\phi}$ aber, wie man sofort sieht, der oben schon erwähnte Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}_1^4$ und dem Tangentialraum $T_x(\mathbb{R}_1^4)$. Die Metrik g in (6) induziert eine Metrik auf $T_x(\mathbb{R}_1^4)$, definiert durch die Bilinearform

$$\begin{aligned} \tilde{g}_x &:= dx^j \otimes dx_j = dx^0 \otimes dx_0 - dx^1 \otimes dx_1 - \dots - dx^3 \otimes dx_3 = \\ &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \end{aligned} \quad (8)$$

wobei die dx^j , $j=0,1,2,3$, eine Basis des dualen Raumes $T_x^*(\mathbb{R}_1^4)$ bilden, und g_{ij} für alle Punkte x konstant ist. Benutzen wir noch die Tatsache, daß $dx^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \delta_{ji}$ ist, so

erhält man mit (8):

$$\tilde{g}_x (a^j \partial_j, b^1 \partial_1) = a^j b_j$$

für zwei beliebige Tangentialvektoren $a^j \partial_j$ und $b^1 \partial_1$. Die Existenz der Abbildung $\tilde{g}_x$ in (7), die eine bijektive Beziehung zwischen dem Raum $\mathbb{R}_1^4$ und dem zugehörigen Tangentialraum $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ herstellt, ist charakteristisch für lineare Räume. Für beliebige Mannigfaltigkeiten hat man im allgemeinen nur lokal solch einen Diffeomorphismus. Die Abbildung $\tilde{g}_x$ in (7) soll schließlich dazu benutzt werden, um den Homeomorphismus $\varphi : M_4^E \longrightarrow \mathbb{R}_1^4$, der uns die mathematische Beschreibung des Ausmessens von gewissen physikalischen Ereignissen liefert, zu konstruieren. Dabei machen wir auch Gebrauch von einer nun zu untersuchenden Beziehung zwischen den am Ereignis E vorliegenden Maßstäben $b(E)$ und den Elementen des Tangentialraumes $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ am Punkt $x = \varphi(E)$.

1.2. Der Raum B der Maßstäbe

Wir gehen aus von der Annahme, daß es zu einem vorgegebenen physikalischen System immer eine nicht leere Menge von Maßstäben $\{b\}$ gibt. Diese Menge bezeichnen wir mit B . Zunächst betrachten wir die Maßstäbe unabhängig von ihrer Richtung in Raum und Zeit, sodaß die Menge B höchstens einen 1-dimensionalen Raum aufspannt. Sollen die Maßstäbe auch nach ihrer Lage in Raum und Zeit unterschieden werden, also der vektorielle Charakter der Elemente von B betont werden, so bezeichnen wir diese Menge mit $\underline{B}^4$ und ihre Elemente mit $\underline{b}$. Es ist klar, daß man zum Ausmessen von irgendwelchen Ereignissen in Raum und Zeit mit Längenmaßstäben vollkommen auskommt, da man die Zeitmessung immer auf eine Längenmessung zurückführen kann, indem man einfach Strecken ausmißt, die ein Lichtstrahl in bestimmten Zeiten zurücklegt.

Im allgemeinen sind die Maßstäbe b oder die Vektormaßstäbe $\underline{b}$ einem gewissen Ereignis E in Raum und Zeit zugeordnet, d.h. im Prinzip kann man an verschiedenen Ereignissen E auch verschiedene Maßstäbe b bzw. $\underline{b}$ haben. Deshalb ist es genauer anstatt b bzw. $\underline{b}$ $b(E) = \underline{b}_E$ bzw. $\underline{b}(E) = \underline{b}_E$ zu schreiben. Die Menge aller bei E vorhandenen Maßstäbe sei dann B_E bzw. $\underline{B}_E^4$.

Wir betrachten nun ein beliebiges Element $\underline{b}_E$ aus der Menge $\underline{B}_E^4$.

Es soll eine Abbildung φ_* gefunden werden, die natürlich eng mit dem zu konstruierenden Homeomorphismus φ zusammenhängt und die das vorgegebene b_E in eindeutiger Weise einem Element $t_x(b_E) \in T_x(\mathbb{R}_1^4)$ mit $x = x(E) = \varphi(E)$ zuordnet. Dazu gehen wir wie folgt vor:

Sei $x = 0 = (0,0,0,0)$ der Nullpunkt im Raum $\mathbb{R}_1^4$, ferner sei $\hat{E}$ irgendein Ereignis aus M_4^E . Wir wählen nun den Homeomorphismus φ so, daß das Ereignis $\hat{E}$ gerade auf den Nullpunkt $x = 0$ abgebildet wird, d.h. $\hat{E} = \varphi^{-1}(x=0)$. Nun nehme irgendeinen Maßstab $\hat{b} \neq 0$ aus der Menge B und bringe ein Ende desselben in den Punkt $\hat{E}$. Das andere freie Ende wird in die vier unabhängigen zu einander orthogonalen Richtungen gedreht, (dabei wird angenommen, daß man weiß, wie dies technisch durchzuführen ist) und bestimmt dadurch vier Ereignisse E_j , $j=0,1,2,3$. Die vier so konstruierten Vektoren $(\hat{E}, E_j)$ bestimmen vier vektorielle Maßstäbe $\hat{b}_j$. Damit kann aber die Abbildung φ_* definiert werden durch

$$\varphi_*(\hat{b}_j) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{x=0}, \quad j = 0,1,2,3 \quad (9)$$

und der Forderung, daß φ_* eine lineare Abbildung ist. Diese Forderung hat natürlich nur Sinn, wenn man etwas über die algebraische Struktur des Raumes B_E^4 weiß; diese wird anschließend untersucht werden, und es wird sich zeigen, daß B_E^4 praktisch die Struktur eines 4-dimensionalen Vektorraums besitzt. Im folgenden wollen wir das System, das aus dem Ereignis $\hat{E}$ und den vier orthogonalen Maßstäben $\hat{b}_j$ besteht, kurz mit $[\hat{E}, \hat{b}]$ bezeichnen.

Per definitionem ist die Abbildung φ_* in (9) injektiv, aber im allgemeinen nicht surjektiv, weil man einfach im allgemeinen in einem atomistischen System nicht ein Kontinuum von Maßstäben b mit einem Kontinuum von Längen - z.B. Comptonwellenlängen - zur Verfügung hat. Hier liegt auch der entscheidende Punkt für die Anwendung unserer Überlegungen auf realistische physikalische Systeme, die ja im allgemeinen nicht skaleninvariant sind, die Ausnahme ist gerade der Fall für Masse $m=0$, wo man ja wirklich ein Kontinuum von Maßstäben zur Verfügung hat.

Damit ist die Menge B_E^4 im allgemeinen kein Vektorraum, der zum Raum $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ isomorph ist, sondern B_E^4 ist nur bijektiv abbildbar auf die Untermenge $\varphi_*(B_E^4) \subset T_x(\mathbb{R}_1^4)$. Es ist aber leicht sich vorzustellen, daß man durch Extrapolieren und Inter-

polieren der physikalischen Maßstäbe $\underline{b} \in \underline{B}_E^4$ schließlich ein 4-dimensionales Kontinuum von Maßstäben erhält. Mathematisch gesprochen heißt das, wir bilden die lineare Hülle der Menge $\underline{B}_E^4$ und erhalten dadurch einen 4-dimensionalen linearen Vektorraum $\underline{\check{B}}_E^4$, der trivialerweise zu $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ isomorph ist. Die auf ganz $\underline{\check{B}}_E^4$ linear fortgesetzte Abbildung $\varphi_*: \underline{\check{B}}_E^4 \rightarrow T_x(\mathbb{R}_1^4)$ bezeichnen wir mit $\check{\varphi}_*$. Diese Abbildung ist dann ein Vektorraumisomorphismus, wie man leicht aus der Definition (9) erkennen kann.

Die Abbildung $\check{\varphi}_*$ induziert auf dem Raum $\underline{\check{B}}_E^4$ die folgende Metrik

$$g_E(\check{b}_1, \check{b}_2) := \tilde{g}_{x(E)}[\check{\varphi}_*(\check{b}_1), \check{\varphi}_*(\check{b}_2)] \quad (10)$$

für beliebige Elemente $\check{b}_1, \check{b}_2 \in \underline{\check{B}}_E^4$, mit $\tilde{g}_{x(E)}$ aus Definition (8) und $x(E) = \varphi(E)$ der Punkt im Raum $\mathbb{R}_1^4$, dem das Ereignis E mittels der Abbildung φ zugeordnet werden soll.

Die Definition (10) gibt uns auch die Möglichkeit, den Begriff der Länge eines Maßstabes einzuführen:

$$l^2(\check{b}) := g_E(\check{b}, \check{b}) \quad \text{bzw.} \quad |l(\check{b})| = \sqrt{|l^2(\check{b})|} \quad (11)$$

Für die Maßstäbe $\hat{b}_j$ erhält man dann mit (9)

$$l^2(\hat{b}_j) = g_{jj}.$$

Deshalb nennen wir den Maßstab $\hat{b}$ die "Einheitslänge" und die mit Hilfe von $\hat{b}$ konstruierten vier Vektormaßstäbe $\hat{b}_j$, $j=0, \dots, 3$, die "Einheitsmaßstäbe". Auf Grund unserer Definitionen (8), (10) und (11) ist unser Längenbegriff Poincare-invariant. Daraus folgt aber, daß wir einen beliebigen Maßstab $\underline{b}$ von einem Ereignis E_1 zu einem Ereignis E_2 durch Translation und Raum-Zeit Drehung bringen können, ohne daß sich seine Länge dabei ändert. Bezeichnen wir eine solche Bewegung mit τ , so gilt demnach

$$\tau: \underline{b}_1(E_1) \longrightarrow \underline{b}_2(E_2) \quad \text{mit } b_1(E_1) = b_1(E_2) \text{ oder}$$

$$l^2(\tau(\underline{b}_1(E_1))) = l^2(\underline{b}_1(E_1)).$$

Anschaulich bedeutet dies folgendes: falls man z.B. das Urmeter $\underline{b}_1(E_1)$ von Paris zu einem Punkt E_2 in München bringt, so hat man hier einen Maßstab $\underline{b}_2(E_2)$, der im allgemeinen natürlich nicht

mehr parallel zum ersten in Paria liegt, der aber dieselbe Länge besitzt.

Wir kommen jetzt zu unserem eigentlichen Vorhaben, nämlich der Konstruktion des Homeomorphismus $\varphi: M_4^E \rightarrow \mathbb{R}_1^4$. Diese Abbildung ergibt sich nun leicht mit Hilfe der Maßstäbe $\underline{b}$ und ihrer Idealisierungen $\tilde{b} = \xi \hat{b}$, wo ξ irgendeine reelle Zahl ist.

Sei E irgendein Ereignis in M_4^E . Ferner sei $\tilde{b}(\hat{E}, E)$ derjenige vektorielle Maßstab, dessen Anfangspunkt mit dem schon früher gewählten Ereignis $\hat{E}$ und dessen Endpunkt mit E zusammenfällt. In unserem oben gewählten System $[\hat{E}, \hat{b}]$ projizieren wir den Maßstab $\tilde{b}(E, E)$ auf die vier orthogonalen Maßstäbe $\hat{b}_j$, d.h. auf Grund der Vektorraumeigenschaft des Raumes der Maßstäbe können wir den Maßstab $\tilde{b}(\hat{E}, E)$ als Linearkombination der Maßstäbe $\hat{b}_j$ darstellen

$$\tilde{b}(\hat{E}, E) = \xi^j \hat{b}_j, \quad \xi^j \in \mathbb{R} \quad \text{für } j=0,1,2,3.$$

Dies gibt uns einen Homeomorphismus $\xi: M_4^E \rightarrow \tilde{B}_E^4$, der natürlich von der Wahl des Systems $[\hat{E}, \hat{b}]$ abhängt:

$$\xi[\hat{E}, \hat{b}] : E \mapsto \xi^j(E) \hat{b}_j(\hat{E}). \quad (12)$$

Wenn wir weiter mit e_0, e_1, e_2, e_3 die Punkte $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$ und $(0,0,0,1)$ des Raumes $\mathbb{R}_1^4$ bezeichnen und den folgenden Homeomorphismus ω zwischen dem Raum $\tilde{B}_E^4$ der Maßstäbe am Punkt E und dem Raum $\mathbb{R}_1^4$ betrachten

$$\omega[\hat{E}, \hat{b}] : \hat{b}_j \mapsto e_j, \quad j=0,1,2,3 \quad \text{bzw.} \quad (13)$$

$$\omega[\hat{E}, \hat{b}] : \xi^j \hat{b}_j \mapsto \xi^j e_j, \quad (14)$$

so können wir jetzt den gesuchten Homeomorphismus $\varphi: M_4^E \rightarrow \mathbb{R}_1^4$, der natürlich auch von der Wahl des Systems $[\hat{E}, \hat{b}]$ abhängt, direkt angeben:

$$\varphi[\hat{E}, \hat{b}] := \omega[\hat{E}, \hat{b}] \circ \xi[\hat{E}, \hat{b}], \quad \text{bzw.} \quad (15)$$

$$\varphi[\hat{E}, \hat{b}] : E \mapsto x^j(E) e_j \quad \text{mit } x^j(E) = \xi^j(E, [\hat{E}, \hat{b}]), \quad (16)$$

wobei die ξ^j eben mit Hilfe von (12) eindeutig bestimmt werden. Da, wie aus (7) ersichtlich ist, $G(\partial_j) = e_j$ gilt, und auch $\varphi_*(\hat{b}_j) = \partial_j$

ist, hat man

$$\omega_{[\hat{E}, \hat{b}]} = \mathcal{G} \circ \check{\varphi}_{[\hat{E}, \hat{b}]} \quad (17)$$

Die gesamten obigen Überlegungen zur Konstruktion der Abbildung $\varphi: M_4^E \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ können wir in dem folgenden Diagramm übersichtlich zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccc} M_4^E & \xrightarrow{\varphi_{[\hat{E}, \hat{b}]}} & \mathbb{R}_1^4 \\ \downarrow \xi_{[\hat{E}, \hat{b}]} & \nearrow \omega_{[\hat{E}, \hat{b}]} & \uparrow \mathcal{G} \\ \tilde{B}_{\hat{E}}^4 \subset \tilde{\tilde{B}}_{\hat{E}}^4 & \xrightarrow{\check{\varphi}_{[\hat{E}, \hat{b}]}} & T_{x=0}(\mathbb{R}_1^4) \end{array}$$

Dabei sind alle angegebenen Abbildungen Homeomorphismen in den jeweilig mit der entsprechenden Topologie versehenen Räumen.

Wir sollten an dieser Stelle noch betonen, daß die Definitionen der Abbildungen ξ und ω charakteristisch für einen flachen Raum sind, da man in Räumen, in denen die metrische Struktur durch schwere Massen beeinflusst wird, obige Identifikation von Längen von Maßstäben auf der einen Seite und den Koordinatenzahlen für physikalische Ereignisse auf der anderen Seite nicht mehr gegeben hat.

Bei unseren bisherigen Überlegungen haben wir nur unsere Annahme benutzt, daß die Menge B der Maßstäbe b nicht leer ist, d.h., daß es mindestens ein $\hat{b} \in B$ gibt. Wenn es nun aber noch andere Maßstäbe $b \in B$ gibt, so stellen wir uns vor, daß alle diese Maßstäbe mit Hilfe unseres Einheitsmaßstabes $\hat{b}$ geeicht sind, so daß gilt

$$b = \frac{1}{\kappa_{\hat{b}}(b)} \hat{b} \quad (18)$$

mit $\kappa_{\hat{b}}(b)$ eine beliebige nicht verschwindende reelle Zahl, die von b und $\hat{b}$ abhängt. Zum Beispiel kann man ja die Comptonwellenlängen aller Hadronen mit Hilfe der Comptonwellenlänge des Pion eichen. Wie oben die Konstruktion des Homeomorphismus φ mit Hilfe des Maßstabs $\hat{b}$ durchgeführt wurde, so können wir dasselbe ja auch

mit dem Maßstab b machen, d.h. wir messen nicht mehr mit der Comptonwellenlänge des Pion sondern mit der eines Nukleon zum Beispiel. Analog zu oben bezeichnen wir das System, das aus dem Ereignis $\hat{E}$ und den vier mit b konstruierten orthogonalen vektoriellen Einheitsmaßstäben $\hat{b}_j$ besteht, mit $[\hat{E}, b]$. Damit erhalten wir

$$\xi[\hat{E}, b] : E \mapsto \gamma^j \hat{b}_j, \quad \gamma^j = \gamma^j(E, [\hat{E}, b]) \quad (19)$$

$$\text{mit} \quad \hat{b}_j = \frac{1}{\kappa_{\hat{b}}(b)} \hat{b}_j \quad \text{und} \quad g_{\hat{b}}(\hat{b}_j, \hat{b}_k) = 0 \text{ falls } j \neq k. \quad (20)$$

Vergleich von (12), (16) und (19) ergibt sofort

$$x^j(E, [\hat{E}, \hat{b}]) = \gamma^j(E, [\hat{E}, b]) / \kappa_{\hat{b}}(b). \quad (21)$$

Dafür schreiben wir auch kurz $x^j = \gamma^j / \kappa$, wenn die Abhängigkeit von den einzelnen Maßstäben nicht besonders erwähnt werden soll.

Zunächst machen wir keine Aussage darüber, wieviele Maßstäbe b die Menge B enthält, oder was dasselbe ist, welche Werte die Zahl κ in (18) wirklich annimmt. Wenn wir schließlich dieselben Überlegungen auf die Menge $\hat{B}$ anwenden, dann ist es klar, daß κ jeden reellen Wert ungleich Null annehmen kann. Dann hat man wieder dieselben Einschränkungen an die Struktur derjenigen physikalischen Systeme, auf die man die Konforme Gruppe anwenden kann.

2. Die Wirkung der Poincare Gruppe $P_{10}[\Lambda, a]$ auf M_4^E und B

Es sollen hier kurz wohl bekannte Eigenschaften der Poincare Gruppe zusammengestellt werden, nur wollen wir diese im Rahmen der von uns im ersten Kapitel eingeführten Begriffswelt wie dem Raum der physikalischen Ereignisse M_4^E und dem Raum der Maßstäbe B formulieren. Wir interpretieren die 10-parametrische Poincare Gruppe $P_{10}[\Lambda, a]$ als eine Gruppe von Transformationen, die ein Ereignis E auf ein anderes Ereignis E' abbilden, d.h. falls τ ein Element aus $P_{10}[\Lambda, a]$ ist, so gilt

$$\tau : E \mapsto E' \text{ mit } x^j(E') = \Lambda^j_k x^k(E) + a^j. \quad (22)$$

Dabei werden die Koordinatenzahlen $x^j(E')$ mit Hilfe desselben Systems $[\hat{E}, \hat{b}]$ bestimmt wie vorhin die Zahlen $x^k(E)$. Die Abbildung

(22) ausgedrückt in den Koordinaten x^k ist die bekannte Wirkung der Poincare Gruppe im Raum $\mathbb{R}_1^4$. Diese Abbildung induziert auch eine Abbildung des Tangentialraums $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ in den Tangentialraum $T_{\mu(x)}(\mathbb{R}_1^4)$. Denn seien M und N zwei beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $\mu: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung, ferner sei f eine im Punkt $\mu(x)$ differenzierbare Funktion, dann induziert μ eine Abbildung $\mu_*: T_x(M) \rightarrow T_{\mu(x)}(N)$ der Tangentialräume in den Punkten x in M bzw. $\mu(x)$ in N , definiert wie folgt:

$$\mu_*: T_x(M) \ni t \mapsto \mu_* t \in T_{\mu(x)}(N)$$

$$\text{wobei} \quad (\mu_* t) f(\mu(x)) := t(f \circ \mu(x)) \quad . \quad (23)$$

Wenden wir diese Definition auf die homogenen Lorentztransformationen $L_6[\Lambda]$ und die Translationen $T_4[a]$ an, so erhalten wir, wenn wir uns auf die Wirkung der Transformationen auf eine Basis von $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ beschränken:

$$T_4[a] \ni T_a: \left[(T_a)_* \frac{\partial}{\partial x^j} \right]_{x'} = \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (24)$$

$$L_6[\Lambda] \ni \Lambda: \left[\Lambda_* \frac{\partial}{\partial x^j} \right]_{x'} = \Lambda^k{}_j \frac{\partial}{\partial x^k} \quad . \quad (25)$$

Auf Grund der Gleichung (9) induzieren diese Transformationen auch Abbildungen im Raum $\check{B}$ der Maßstäbe, nämlich

$$T_4[a] \ni T_a: \check{b}_j(E) \mapsto [(T_a)_* \check{b}_j](E') = \check{b}_j(E') \quad (26)$$

$$6[\Lambda] \ni \Lambda: \check{b}_j(E) \mapsto [\Lambda_* \check{b}_j](E') = \Lambda^k{}_j \check{b}_k(E'). \quad (27)$$

Dabei ist $\check{b}_k(E')$ einfach der durch Paralleltranslation des Maßstabs $\check{b}_k(E)$ vom Ereignis E zum Ereignis E' gewonnene Maßstab. Wir haben schon früher gesehen, daß jede Transformation $\tau \in P_{10}[\Lambda, a]$ im Raum $\check{B}$ der Maßstäbe unabhängig von ihrer Richtung einfach als Identität wirkt, wenn wir noch annehmen, daß der Raum $\check{B}(E)$ gleich dem Raume $\check{B}(E')$ ist, d.h. $\check{B}$ unabhängig vom speziellen Ereignis E ist.

3. Eichtransformationen in der Menge B der Maßstäbe und im Raum M_4^E der Ereignisse

Auf Grund unserer Bemerkung oben, nämlich daß die Poincare Gruppe auf dem Raum B als Identität wirkt, ist es klar, daß man in einer Poincare-invarianten Theorie im Grunde nur einen einzigen Maßstab $b \in B$ benötigt. Wir wissen aber, daß es in der physikalischen Wirklichkeit sicher mehrere verschiedene Maßstäbe gibt. Es ist deshalb sinnvoll, Abbildungen in der Menge B zu betrachten. Sei also B_E die Menge der Maßstäbe am Punkte E und $B_{E'}$, die entsprechende Menge am Ereignis E' . Dann ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, daß $B_E = B_{E'}$, da man ja in einem flachen Raum Maßstäbe ohne Veränderung ihrer Länge von einem Ort zum anderen bewegen kann. Wir betrachten deshalb nur Abbildungen von $B_E \longrightarrow B_E$. Von diesen wiederum interessieren uns in diesem Zusammenhang hier ausschließlich die sogenannten "Eichtransformationen" von der folgenden Art:

$$B_E \ni b_E \longmapsto b_E' = \beta(E) b_E \quad b_E \in B_E \quad (28)$$

wo $\beta(E)$ ein reeller Faktor ist, der in bestimmter Weise vom Ereignis E abhängt. Die Abbildung (28) induziert in natürlicher Weise eine Abbildung $E \longmapsto E'$, auf die wir im folgenden noch zu sprechen werden kommen. Unter den Abbildungen (28) werden wir uns nun insbesondere mit den Dilatationen und den speziellen konformen Transformationen beschäftigen.

3.1. Die Gruppe der Dilatationen

Zunächst soll die einfachste Abbildung vom Typ der Gleichung (28) betrachtet werden, nämlich der Fall, wo die Zahl $\beta(E)$ unabhängig vom Ereignis E eine feste positive reelle Zahl ist, d.h.

$\beta(E) = \beta \in \mathbb{R}^+ = \{ \varrho > 0 \}$. Diese Annahme ist äquivalent damit, daß die Menge B_E ein Kontinuum von Maßstäben enthält, oder daß die Zahl κ , die in (18) eingeführt worden war, jeden positiven reellen Wert annehmen kann. Wir bezeichnen dieses Kontinuum von Maßstäben mit B_+ . Die Menge B_+ hat dann die Struktur einer 1-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Die Abbildung

$$D_1(\xi) : B^+ \ni b \longmapsto b' = \xi b \in B^+, \xi > 0 \quad (29)$$

heißt eine Dilatation oder auch Skalentransformation. Aus unseren bisherigen Überlegungen ist klar, daß die Gruppe der Dilatationen nur für solche Systeme eine wirkliche Symmetriegruppe sein kann, die die Menge B^+ als Menge der möglichen Maßstäbe besitzt. Dies ist aber, wie bekannt ist, für alle massiven Systeme, z.B. für atomistische Systeme nicht der Fall.

Die Abbildung (29) im Raum B induziert die folgende Abbildung im Raum $\tilde{B}_E^4$:

$$\tilde{b} \longmapsto \xi \tilde{b} \quad (30)$$

Zusammen mit der Abbildung $\mathcal{E}$ in (12) erhalten wir damit eine Abbildung im Raum der Ereignisse

$$E = \varphi_{[\tilde{E}, \tilde{b}]}^{-1}(x) \longmapsto E' = \varphi_{[\tilde{E}', \tilde{b}']}^{-1}(x) = \varphi_{[\tilde{E}, \tilde{b}]}^{-1}(\xi x). \quad (31)$$

Im Raum $\mathbb{R}_1^4$ ergibt sich dann die Transformation

$$x(E) \longmapsto x'(E') = \xi x(E), \quad (32)$$

das heißt gerade die Skalentransformation, wie sie im allgemeinen im Ortsraum definiert wird.

Für die Abbildung $\mathcal{E}_{[\tilde{E}, \tilde{b}]}$ erhalten wir analog zu (19)

$$\mathcal{E}_{[\tilde{E}, \tilde{b}]}(E') = \gamma^j(E', [\tilde{E}, \tilde{b}']) \tilde{b}'_j = \gamma^j(E, [\tilde{E}, \tilde{b}]) \tilde{b}_j, \quad (33)$$

$$\text{denn } \gamma^j(E', [\tilde{E}, \tilde{b}']) = \gamma^j(E, [\tilde{E}, \tilde{b}]) \text{ für alle } j=0, \dots, 3. \quad (34)$$

Dies wiederum folgt sofort aus den Beziehungen (31) und (32), die die folgenden Gleichungen induzieren:

$$\kappa_{\tilde{b}'}(b') = \kappa_{\tilde{b}}(b) = \xi \kappa_{\tilde{b}}(b')$$

$$\text{sowie} \quad b' = \frac{1}{\kappa_{\tilde{b}}(b)} \hat{b}' = \frac{\xi}{\kappa_{\tilde{b}}(b)} \hat{b}. \quad (35)$$

Betrachten wir nun ein festes Ereignis E sowie zwei Maßstäbe b und b' , die gemäß (29) zusammenhängen. Wir können einmal die Abbildung $\mathcal{E}_{[\tilde{E}, \tilde{b}]}$ und auch die Abbildung $\mathcal{E}_{[\tilde{E}', \tilde{b}']}$ auf E anwenden. Wir verlangen dann natürlich, daß sich dieselben Bilder im Raum

B_4^E ergeben, also

$$\varepsilon_{[\tilde{E}, b]}(E) = \gamma^j(E, [\tilde{E}, b]) \cdot b_j = \varepsilon_{[\tilde{E}, b]}(E) = \gamma^j(E, [\tilde{E}, b]) \cdot b_j.$$

Anwendung der Relation (30) ergibt dann

$$\gamma^j(E, [\tilde{E}, b]) = \xi^{-1} \gamma^j(E, [\tilde{E}, b]) , j=0, \dots, 3.$$

Zusammen mit (34) erhalten wir dann schließlich folgendes Transformationsverhalten

$$(\gamma^0(E, [\tilde{E}, b]), \dots, \gamma^3(E, [\tilde{E}, b]); \kappa_b(b)) \mapsto (\gamma^0(E, [\tilde{E}, b']), \dots, \gamma^3(E, [\tilde{E}, b']); \kappa_b(b')) \\ = \xi^{-1} (\gamma^0(E, [\tilde{E}, b]), \dots, \gamma^3(E, [\tilde{E}, b]); \kappa_b(b)) , \quad (36)$$

wenn der Maßstab b auf den Maßstab $b' = \xi b$ abgebildet wird.

Wir definieren deshalb die 5-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit $M_4^E \times B^+$, die in natürlicher Weise zum Raum

$$N_+^5 := \{ \gamma = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \kappa) \} = \mathbb{R}_1^4 \times \mathbb{R}^+ \quad (37)$$

homeomorph ist. Führt man in N_+^5 dann noch die Äquivalenzrelation $[\gamma^1] = [\gamma^2] \sim \gamma^1 = \xi \gamma^2$, $\xi > 0$ ein, so ergibt die Relation (35) sofort, daß der so entstandene Raum N_+^5 / A^+ , wo $A^+ = \{ \kappa > 0 \}$ bedeutet, zum Raum M_4^E der Ereignisse E homeomorph ist. Wir schließen aus obigen Überlegungen, daß die Menge der Ereignisse und Maßstäbe, solange nur die Dilatationen betrachtet werden, ein direktes Produkt bilden und der Raum der Ereignisse einfach durch kanonische Projektion aus diesem hervorgeht. Insofern ist dieser Fall nicht besonders aufregend. Sobald wir aber nun den Fall der speziellen konformen Transformationen betrachten, werden wir sehen, daß die Menge der Ereignisse und Maßstäbe kein direktes Produkt mehr bilden sondern an dessen Stelle der Begriff des Faserbündel treten muß.

Die Wirkung der Dilatationen $D_1[\xi]$ im Raum $M_4^E \times B_+$ wird durch die Gleichungen (34) und (35) beschrieben, während die Wirkung der zu $D_1[\xi]$ isomorphen multiplikativen Gruppe A^+ der positiven reellen Zahlen durch die Relation (36) gegeben ist.

3.2. Die speziellen konformen Transformationen

Während bisher der Faktor $\beta(E)$ in der Relation (28) für alle Ereignisse E konstant war, werden wir jetzt den Fall betrachten, wo er in einer nicht trivialen Weise vom Ereignis E abhängt.

Da wir weiterhin mit Hilfe der Regeln ε und ω die Koordinatenzahlen $x^j(E')$ bestimmen wollen, wo E' aus E durch die durch (28) induzierte Abbildung $E \mapsto E'$ hervorgeht, kann die Funktion $\beta(E)$ nicht in beliebiger Weise vom Ereignis E bzw. dessen Koordinatenzahlen $x(E)$ abhängen, da eben obige Regeln ε und ω eng mit der flachen Struktur des Raumes M_4^E der Ereignisse E zusammenhängen. Um diese Struktur nicht zu zerstören, müssen wir verlangen, daß die durch (28) induzierte Abbildung

$$\underline{b}_E \mapsto \underline{b}'_E$$

eine konforme Abbildung bezüglich der in (10) definierten Metrik g_E ist. Die Bedingung ist also die folgende:

$$g_E(\underline{b}'_E, \underline{b}'_E) = \beta(E)^2 g_E(\underline{b}_E, \underline{b}_E) . \quad (38)$$

Die Gruppe aller Transformationen mit dieser Eigenschaft ist schon längst bekannt²⁸⁾. Aus unseren bisherigen Überlegungen ist klar, daß die Poincare Gruppe und auch die Gruppe der Dilatationen dazu gehören. Die Gesamtheit aller Transformationen mit der Eigenschaft (38) erhält man, wenn man noch zu den beiden gerade erwähnten Gruppen die Transformation $\tilde{I}_r$ hinzunimmt, die wie folgt definiert werden kann:

$$\tilde{I}_r : \underline{b}_E \mapsto \underline{b}'_E = - (x^j x_j)^{-1} \underline{b}_E , \quad (39)$$

wobei $x = x(E)$ ist und natürlich $x^j x_j = 0$ ausgeschlossen werden muß. Wie schon öfters vorgeführt, induziert die Abbildung $\tilde{I}_r$ eine Abbildung $E \mapsto E'$ im Raum der Ereignisse. Die Koordinatenzahlen $x^j(E')$ werden wiederum mit Hilfe der Regeln ε und ω in folgender Weise bestimmt:

Sei $[\check{E}, \hat{b}]$ das System, in dem die Zahlen $x(E)$ für alle Ereignisse E bestimmt wurden, d.h. wir nehmen für alle Ereignisse denselben Einheitsmaßstab $\hat{b}_E = \hat{b}_E^\circ$. Betrachte nun ein spezielles Ereignis E mit den Koordinatenzahlen $x(E)$. Diese Zahlen bestimmen einen neuen Maßstab $\hat{b}'_E = -(x^j x_j)^{-1} \hat{b}_E$, wobei wir der Ein-

fachheit wegen x^j für $x^j(E)$ geschrieben haben. Natürlich ist auch $x_j x^j \neq 0$ vorausgesetzt, ferner wird angenommen, daß das oben definierte Objekt $\hat{b}_E^i$ wirklich wieder ein Maßstab im Punkt E ist; insbesondere wird damit vorausgesetzt, daß die Menge der Maßstäbe gleich der im ersten Kapitel eingeführten kontinuierlichen Menge $\tilde{E}$ von Maßstäben ist. Mit dem Maßstab $\hat{b}_E^i$ bilden wir nun das System $[\hat{E}, \hat{b}_E^i]$, indem wir den Maßstab $\hat{b}_E^i$ von $\tilde{E}$ aus in dieselben vier orthogonalen Richtungen legen, wie wir es mit $\hat{b}$ gemacht hatten, und dabei vier Vektormaßstäbe $\hat{b}_j^i$ erhalten. Die Koordinaten $x^{,j}$ für das Ereignis E' sollen dann durch folgende Vorschrift gegeben sein:

$$\hat{E}[\hat{E}, \hat{b}_E^i](E') = x^j(E) \hat{b}_j^i = - (x^j x_j)^{-1} x^j(E) \hat{b}_j^i. \quad (40)$$

In $\mathbb{R}_1^4$ induziert also die Abbildung $\tilde{I}_R$ folgende Transformation I_R :

$$I_R : x^j(E) \mapsto x^{,j}(E') = - x^j(E) (x^j x_j(E))^{-1}. \quad (41)$$

Auf Grund der Gleichung (23) ergibt sich die induzierte Abbildung $I_{R*} : T_x(\mathbb{R}_1^4) \longrightarrow T_x(\mathbb{R}_1^4)$ mit

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \mapsto (I_{R*} \frac{\partial}{\partial x^j}) \Big|_x = (x^j x_j)^{-2} (2 x^k x_j - \delta_j^k x^1 x_1) \frac{\partial}{\partial x^{,k}}. \quad (42)$$

Die Linearität der Abbildung φ_*^{-1} wiederum ergibt

$$\hat{b}_j^i(E) \mapsto \hat{b}_j^i(E') = (x^1 x_1)^{-2} (2 x_j x^k - \delta_j^k x^1 x_1) \hat{b}_k^i(E'), \quad (43)$$

wobei $\hat{b}_k^i(E')$ der durch Paralleltranslation von $\hat{b}_k^i(E)$ an das Ereignis E' erzeugte Maßstab ist.

Vergleicht man die Aussagen (42) und (43) mit (40), so sieht man, daß die Relation

$$\tilde{I}_R(\hat{b}_j) = \varphi_*^{-1} \circ I_{R*} \circ \varphi_*(\hat{b}_j)$$

nicht mehr gültig ist, was einfach mit der Tatsache zusammenhängt, daß I_R keine lineare Abbildung im Raum $\mathbb{R}_1^4$ ist.

Wir haben in (41) gesehen, daß die Inversion I_R im Raum $\mathbb{R}_1^4$ für alle x mit $x^j x_j = 0$ nicht definiert ist. Weiter ist, wie man sich leicht überlegen kann, I_R nicht ein Element der mit der Eins zusammenhängenden Komponente der vollen Konformen Gruppe im Minkowski-Raum M_4 , wenn wir auch bei diesen von den Definitionsbereichen einmal ganz absehen.

Betrachtet man jedoch die Transformation $I_r T_c I_r$, wobei T_c ein Element der Translationsgruppe $T_4[c]$ ist, so bilden diese Transformationen die Gruppe der speziellen konformen Transformationen, die eine Untergruppe der Einskomponente der 15-parametrischen Konformen Gruppe ist.

Wir wollen nun die Wirkung dieser Transformationen im Raum B_E^4 der Maßstäbe betrachten. Dazu ist zunächst eine Bemerkung nötig. Die Definition sowohl der Inversion I_r wie auch der Translation T_c , wie sie in (41) bzw. in (1) eingeführt worden waren, hängt natürlich von der Wahl des Systems $[\hat{E}, b]$ ab. Sei nämlich E ein Ereignis mit den Koordinatenzahlen $x(E)$, die mit Hilfe des Systems $[\hat{E}, b]$ bestimmt wurden, und seien $\tilde{x}(E)$ Koordinatenzahlen desselben Ereignisses E diesmal bezüglich eines Systems $[\hat{E}, \tilde{b}]$, mit $\tilde{b} = \sigma b$ und $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann können wir die Transformationen $\tilde{I}_r$ in (39) und $\tilde{T}_c$ in (1) mit Hilfe der Koordinatenzahlen $\tilde{x}(E)$ bzw. dem Maßstab $\tilde{b}$ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_r : \tilde{b}_E &\mapsto \tilde{b}'_E = -\sigma^{-2} (\tilde{x}^k \tilde{x}_k)^{-1} \tilde{b}_E \quad \text{bzw.} \\ \tilde{I}_r : \tilde{x} &\mapsto \tilde{x}' = -\sigma^{-2} (\tilde{x}^k \tilde{x}_k)^{-1} \tilde{x} \end{aligned} \quad (44)$$

Für die Translationen T_c erhält man

$$\begin{aligned} T_c : \tilde{x} &\mapsto \tilde{x}' = \tilde{x} + \sigma^{-1} c \quad \text{bzw.} \\ \tilde{T}_c : \tilde{b} &\mapsto \tilde{b}' = \tilde{b} \end{aligned} \quad (45)$$

Damit nun können wir auch die Wirkung einer speziellen konformen Transformation im Raum B_E^4 bzw. im Raum $\mathbb{R}_1^4$ explizit konstruieren. Sei also K_c ein beliebiges Element aus $C_4[c]$. Wir wissen, daß dann K_c dargestellt werden kann durch $K_c = I_r T_c I_r$. Anwendung der Ergebnisse (44) und (45) ergibt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{[\hat{E}, b]}(E) = x^j b_j &\xrightarrow{\tilde{I}_r} x^j b_j^1 = \mathcal{E}_{[\hat{E}, \tilde{b}]}(E^1) \quad \text{mit} \\ b^1 &= -(x^j(E) x_j(E))^{-1} b = \sigma b, \quad \sigma = -(x^j x_j)^{-1} \end{aligned} \quad (46)$$

Die Relation (45) ergibt für die Anwendung von T_c

$$\mathcal{E}_{[\hat{E}, \tilde{b}]}(E^1) = x^j \tilde{b}_j^1 \xrightarrow{T_c} (x^j - c^j x^k x_k) \tilde{b}_j^1 = \mathcal{E}_{[\hat{E}, \tilde{b}]}(E^2). \quad (47)$$

Nochmalige Anwendung von (44) ergibt dann schließlich

$$\mathcal{E}_{[\tilde{E}, b]}(E^2) = (x^j - c^j x \cdot x) \underline{b}_j^1 \xrightarrow{\tilde{I}_r} (x^j - c^j x \cdot x) \underline{b}_j^2 = \mathcal{E}_{[\tilde{E}, b^2]}(E^3) \quad (48)$$

$$b^2 = -[(x^j - c^j x \cdot x)(x_j - c_j x \cdot x)]^{-1} (x \cdot x)^2 \underline{b}^1 = -x \cdot x \, \mathcal{G}(x, c)^{-1} \underline{b}^1,$$

wobei

$$\mathcal{G}(x, c) = 1 - 2 \, c \cdot x + c \cdot c \, x \cdot x.$$

Daraus erhält man nunmehr

$$\begin{aligned} \tilde{K}_c : \underline{b}_E &\longmapsto \underline{b}_E^* = \mathcal{G}(x, c)^{-1} \underline{b} && \text{bzw.} \\ \underline{b}_E^j &\longmapsto \underline{b}_E^{*j} = \mathcal{G}(x, c)^{-1} \underline{b}^j. \end{aligned} \quad (49)$$

Die Relationen (46), (47) und (48) zusammengefaßt ergeben die durch $\tilde{K}_c$ induzierte Abbildung im Raum der Ereignisse

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{[\tilde{E}, b]}(E) = x^j \underline{b}_j &\longmapsto \mathcal{E}_{[\tilde{E}, b]}(E') = (x^j - c^j x \cdot x) \mathcal{G}(x, c)^{-1} \underline{b}_j = \\ &= (x^j - c^j x \cdot x) \underline{b}_j^*. \end{aligned} \quad (50)$$

Im Raum $\mathbb{R}_1^4$ endlich hat die spezielle konforme Transformation K_c die Gestalt

$$K_c : x(E) \longmapsto x'(E') = (x - c \, x \cdot x) \mathcal{G}(x, c)^{-1}, \quad (51)$$

wo $\mathcal{G}(x, c)$ in (48) definiert wurde. Man sieht daraus sofort, daß die Transformation K_c auf dem gesamten Kegel $\mathcal{G}(x, c) = 0$ nicht definiert ist. Mit diesem Problem des Definitionsgebietes der speziellen konformen Transformationen wollen wir uns nun im nächsten Kapitel näher auseinandersetzen.

4. Die Mannigfaltigkeit $K^5(E, b)$ der Ereignisse E und der Maßstäbe b und der Raum M_c^4

Bei der Betrachtung der Inversion $\tilde{I}_r$ in (39) bzw. der speziellen konformen Transformationen $\tilde{K}_c$ in (49) fanden wir, daß diese Transformationen in $x \cdot x = 0$ bzw. $\mathcal{G}(x, c) = 0$ nicht definiert sind. Um nun diese Transformationen in der Physik überhaupt anwenden zu können, müssen wir zunächst einen Raum einführen, auf dem diese Transformationen wohl definierte Objekte sind, was ja im Minkowski-Raum nur für die infinitesimalen Transformationen

der Fall ist. Zu diesem Zweck müssen wir, anschaulich gesprochen, Punkte von der Mannigfaltigkeit der Menge $\hat{\mathcal{C}}(x, c) = 0$ bzw. $x \cdot x = 0$ im Unendlichen hinzunehmen, um damit Bilder für Punkte aus der Menge $\hat{\mathcal{C}}(x, c) = 0$ bzw. $x \cdot x = 0$ unter der Transformation K_c bzw. I_x zur Verfügung zu haben. Übertragen auf die Menge B der Maßstäbe zeigt sich dieses Problem wie folgt: wir haben bisher immer angenommen, daß jeder Maßstab $b_E \in B_E$ mit einem Einheitsmaßstab $\hat{b}_E \in B_E$ geeicht werden kann, so daß gilt

$$b_E = (\kappa_{\hat{b}}(b))^{-1} \hat{b}_E,$$

wobei $\kappa_{\hat{b}}(b)$ eine beliebige positive reelle Zahl sein konnte. Nehmen wir z.B. an, $\hat{b}$ sei gerade die Comptonwellenlänge $\lambda_c(e)$ des Elektrons. Nehmen wir jetzt aber als Maßstab b die Comptonwellenlänge $\lambda_c(j)$ des Photons, so erhalten wir $\kappa_{\lambda_c(e)}(\lambda_c(j)) = 0$,

d.h. dieser Fall war bisher in unseren Überlegungen ganz ausgeschlossen. Sobald wir aber die Inversion bzw. die speziellen konformen Transformationen als für die Physik relevante Eichtransformationen betrachten, müssen wir auch den obigen Fall miteinbeziehen, wie man sofort aus den Gleichungen (18) und (49) ersehen kann

$$b_E \mapsto b_E^* = (\kappa_{\hat{b}}(b'))^{-1} \hat{b}_E^* = (\hat{\mathcal{C}}(x, c) \kappa_{\hat{b}}(b))^{-1} \hat{b}_E. \quad (52)$$

Damit ergibt sich für das Transformationsverhalten von $\kappa_{\hat{b}}(b)$:

$$K_c : \kappa_{\hat{b}}(b) \mapsto \kappa_{\hat{b}}(b') = \hat{\mathcal{C}}(x, c) \kappa_{\hat{b}}(b), \quad (53)$$

d.h. falls nur $\hat{\mathcal{C}}(x, c) = 0$ für ein bestimmtes Ereignis ist, wird $\kappa_{\hat{b}}(b') = 0$.

Insbesondere folgt auch aus (53), daß $\kappa_{\hat{b}}(b)$ jede beliebige reelle Zahl annehmen kann, also auch negativ sein kann. Dieser letzt genannte Fall kann aber ganz leicht in unsere Überlegungen miteinbezogen werden. Wir eichen einen "negativen" Maßstab einfach in "-cm", falls unser Einheitsmaßstab das "cm" gewesen ist. Mit B_0 bezeichnen wir von nun an die Menge aller positiven und negativen Maßstäbe b_+ und $b_- = -b_+$, wobei man die Zerlegung $B_0 = B_+ \cup B_-$, mit $B_- = -B_+$, benutzen kann. B_+ bezeichnet dabei die von uns bisher betrachtete Menge der positiven Maßstäbe. Wir

bemerken noch, daß der Nullmaßstab nicht in B_0 enthalten ist, da ja sonst $\kappa \hat{b}(b)$ den Wert ∞ annehmen müßte, was wir aber ausgeschlossen hatten.

Wir können nun eine Mannigfaltigkeit $M_4^E \times B_0$ der Ereignisse und Maßstäbe bilden, die in natürlicher Weise zu der offenen Menge

$$N_{(\kappa)}^5 = \mathbb{R}_1^4 \times \mathbb{R}_0 = \{ (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \kappa) : \gamma^j \in \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{R}_0 \} \quad (54)$$

mit $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, homeomorph ist. Der Minkowski-Raum M_4^E der Ereignisse E , in dem die Zahl κ die einzelnen verwendeten Maßstäbe charakterisiert, ist dann homeomorph zum Quotientenraum $N_{(\kappa)}^5 / A$. Auf Grund obiger Bemerkung werden wir den so definierten Minkowski-Raum genauer mit $M_{(\kappa)}^4$ bezeichnen. Genauso wollen wir die Menge B_0 von nun an mit demselben Index zur genaueren Bezeichnung versehen. $B_0^{(\kappa)}$ ist demnach diejenige Menge von Maßstäben, die durch die Zahl κ charakterisiert werden können. Seien nun allen Ereignissen E , die mit einem festen Maßstab $\hat{b}^{(\kappa)}$ ausgemessen werden können, die entsprechenden Koordinaten zahlen $x(E)$ zugeordnet. Für $x(E) \cdot x(E) \neq 0$ können wir dann die neuen Maßstäbe $b_E^{(\lambda)}$ definieren

$$b_E^{(\lambda)} := x \cdot x \cdot b_E^{(\kappa)} \quad (55)$$

Falls das Ereignis E in $M_4^{(\kappa)}$ bezüglich des Maßstabs $\hat{b}_E^{(\kappa)}$ die Koordinaten zahlen $x(E)$ besitzt, so bekommt dasselbe Ereignis in dem System $[\hat{E}, \hat{b}_E^{(\lambda)}]$ mit $\hat{b}_E^{(\lambda)} = x(E) \cdot x(E) \cdot \hat{b}_E^{(\kappa)}$ die Koordinaten zahlen

$$y^j = y^j(E) = x^j(E) (x(E) \cdot x(E))^{-1} \quad (56)$$

$$\text{bzw. } x^j(E) = y^j(E) (y(E) \cdot y(E))^{-1}.$$

Aus (56) folgt natürlich unter der Voraussetzung $x(E) \cdot x(E) \neq 0$, daß auch $y(E) \cdot y(E) \neq 0$ ist. Wir können jetzt eine Menge $M_4^{(\lambda)}$ von Ereignissen $E^{(\lambda)}$ und zu jedem Ereignis $E^{(\lambda)}$ eine Menge $B^{(\lambda)}$ von Maßstäben $b^{(\lambda)}$ definieren dadurch, daß wir die in (56) definierten Koordinaten zahlen (y^0, y^1, y^2, y^3) einfach den gesamten Raum $\mathbb{R}_1^4$ durchlaufen lassen, so wie es in $M_4^{(\kappa)}$ auch für die Zahlen (x^0, x^1, x^2, x^3) zutrifft:

$$M_4^{(\lambda)} := \{ E^{(\lambda)} : \mathcal{E}_{[\hat{E}, \hat{b}^{(\lambda)}]}(E^{(\lambda)}) = y^j \hat{b}_E^{(\lambda)} \quad y^j \in \mathbb{R}, j=0,1,\dots,3 \} \quad (57)$$

Auf Grund der Überlegungen, die uns zur Einführung der Menge $M_4^{(\lambda)}$ brachten, ist klar, daß alle Ereignisse $E \in M_4^{(\kappa)}$, die die Koordinatenzahlen $x(E)$ mit $x(E) \cdot x(E) \neq 0$ haben, auch Elemente der Menge $M_4^{(\lambda)}$ in (57) sind. Es sind dies genau die Ereignisse $E^{(\lambda)}$, die bezüglich des Maßstabs $\hat{b}_E^{(\lambda)} = x(E) \cdot x(E) \hat{b}_E^{(\kappa)}$ die Koordinatenzahlen $y^j(E^{(\lambda)}) = (x(E) \cdot x(E))^{-1} x^j(E)$ besitzen.

Durch (57) ist zu jedem Ereignis $E^{(\lambda)} \in M_4^{(\lambda)}$ ein Maßstab $\hat{b}_E^{(\lambda)}$ definiert und damit auch eine Menge $B_E^{(\lambda)}$ durch $b_E^{(\lambda)} \in B_E^{(\lambda)}$ $\times$
 $b_E^{(\lambda)} = (\lambda \hat{b}(b_E))^{-1} \hat{b}_E^{(\lambda)}$, $\lambda \hat{b}(b) \in \mathbb{R}_0$, d.h. wir charakterisieren die Maßstäbe aus $B_E^{(\lambda)}$ durch die Zahl λ . Daß die Mengen $M_4^{(\kappa)}$ und $M_4^{(\lambda)}$ nicht identisch sind, sieht man sofort dadurch, daß die Ereignisse E in $M_4^{(\kappa)}$ mit $x(E) \cdot x(E) = 0$ nicht Elemente der Menge $M_4^{(\lambda)}$ und die Ereignisse $E^{(\lambda)} \in M_4^{(\lambda)}$ mit $y(E) \cdot y(E) = 0$ nicht Elemente der Menge $M_4^{(\kappa)}$ sind; wir zeigen dies für die Elemente $E \in M_4^{(\kappa)}$ mit $x(E) \cdot x(E) = 0$. Wäre $E \in M_4^{(\lambda)}$, dann kann es auch mit dem Maßstab $b_E^{(\lambda)} \in B_E^{(\lambda)}$ vermessen werden, aber da

$$\begin{aligned} b_E^{(\lambda)} &= (\lambda \hat{b}(b))^{-1} \hat{b}_E^{(\lambda)} = (\lambda \hat{b}(b))^{-1} x(E) \cdot x(E) \hat{b}_E^{(\kappa)} = \\ &= (\kappa \hat{b}(b))^{-1} \hat{b}_E^{(\kappa)}, \end{aligned} \quad (58)$$

würde $\lambda \hat{b}(b) = x(E) \cdot x(E) \kappa \hat{b}(b) = 0$ folgen, was im Widerspruch zur Definition der Zahl λ steht. Damit kann aber das Ereignis E nicht mit Maßstäben aus $B_E^{(\lambda)}$ vermessen werden und liegt deshalb auch nicht in der Menge $M_4^{(\lambda)}$, da dies ja gerade die Menge aller Ereignisse $E^{(\lambda)}$ ist, die mit Maßstäben vermessen werden, die durch die Zahl λ charakterisiert werden. Bilden wir deshalb die Vereinigung der beiden Mengen $(M_4^{(\kappa)} \times B_0^{(\kappa)}) \cup (M_4^{(\lambda)} \times B_0^{(\lambda)})$, so erhalten wir eine echte Erweiterung von $M_4^{(\kappa)} \times B_0^{(\kappa)}$.

Wenn wir uns auf die Inversion I_r beschränken würden, so hätten wir jetzt eine Mannigfaltigkeit $M_4^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)}$ erhalten, auf der diese Transformation überall wohl definiert werden kann. Sei nämlich E ein Ereignis aus $M_4^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)}$, dann definieren wir:

$$\begin{aligned} I_r : M_4^{(\kappa)} \ni x(E) &\longmapsto y(E') = -x(E) \in M_4^{(\lambda)} \\ M_4^{(\lambda)} \ni y(E) &\longmapsto x(E') = -y(E) \in M_4^{(\kappa)} \end{aligned} \quad (59)$$

oder

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{[\tilde{E}, \tilde{b}^{(\kappa)}]}(E) &= x^j(E) \hat{b}_j^{(\kappa)} \longmapsto -x^j(E) \hat{b}_j^{(\lambda)} = \mathcal{E}_{[\tilde{E}, \tilde{b}^{(\lambda)}]}(E') \\ \mathcal{E}_{[\tilde{E}, \tilde{b}^{(\lambda)}]}(E) &= y^j(E) \hat{b}_j^{(\lambda)} \longmapsto -y^j(E) \hat{b}_j^{(\kappa)} = \mathcal{E}_{[\tilde{E}, \tilde{b}^{(\kappa)}]}(E') .\end{aligned}\quad (60)$$

Die gleiche Schlußweise wie im Fall der Mannigfaltigkeit $M_4^{(\kappa)} \times B_0^{(\kappa)}$ zeigt, daß auch die Mannigfaltigkeit $M_4^{(\lambda)} \times B_0^{(\lambda)}$ zu der offenen Menge

$$N_{(\lambda)}^5 := \mathbb{R}_1^4 \times \mathbb{R}_0 = \{(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \lambda) : \gamma^j \in \mathbb{R}^1, \lambda \in \mathbb{R}_0\} \quad (61)$$

homeomorph ist. Um die Vereinigungsmenge $M_4^{(\kappa)} \times B_0^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)} \times B_0^{(\lambda)}$ besser und einfacher beschreiben zu können, definieren wir in der Menge $N_{(\kappa)}^5$ die Koordinate

$$\lambda \tilde{b}^{(\kappa)} := \gamma^j \gamma_j / \kappa \tilde{b} \quad , \quad (62)$$

und in der Menge $N_{(\lambda)}^5$ die Koordinate

$$\kappa \tilde{b}^{(\lambda)} := \gamma^j \gamma_j / \lambda \tilde{b} \quad . \quad (63)$$

Damit erfüllen alle Elemente der Menge $M_4^{(\kappa)} \times B_0^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)} \times B_0^{(\lambda)}$ die Relation

$$\gamma^j(E) \gamma_j(E) - \kappa(b_E) \lambda(b_E) = 0 \quad . \quad (64)$$

Die Mannigfaltigkeit $M_4^{(\kappa)} \times B_0^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)} \times B_0^{(\lambda)}$ ist damit homeomorph abbildbar auf die Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned}N_{(\kappa)}^5 \cup N_{(\lambda)}^5 &= \{(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \kappa, \lambda) : \gamma^j, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}^1, \gamma^j \gamma_j - \kappa \lambda = 0, \\ &\quad \kappa^2 + \lambda^2 \neq 0\} \quad .\end{aligned}\quad (65)$$

In diesem Koordinatensystem auf $M_4^{(\kappa)} \times B_0^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)} \times B_0^{(\lambda)}$ hat die Inversion I_r die folgende einfache Gestalt:

Sei das Paar (E, b) gegeben durch $(\gamma^0, \dots, \gamma^3, \kappa, \lambda)$, dann gilt

$$I_r : (E, b) \longmapsto (E', b')$$

$$I_r : \gamma^j(E, b) \longmapsto \gamma^j(E', b') = \gamma^j(E, b),$$

$$\kappa(E, b) \longmapsto \kappa(E', b') = -\lambda(E, b), \quad (66)$$

$$\lambda(E, b) \longmapsto \lambda(E', b') = -\kappa(E, b) \quad .$$

Aus (66) folgt sofort, daß die Inversion I_r damit eine auf ganz $M_4^{(\kappa)} \times B_0^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)} \times B_0^{(\lambda)}$ wohl definierte Abbildung ist. Wir wollen aber die gesamte Konforme Gruppe als überall definierte Transformationsgruppe erhalten. Dazu reicht aber die Mannigfaltigkeit $M_4^{(\kappa)} \times B_0^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)} \times B_0^{(\lambda)}$ noch nicht aus, wie man sofort aus dem folgenden Beispiel ersehen kann. Sei E ein Ereignis aus $M_4^{(\kappa)}$ und T_a eine beliebige Translation. Dann wissen wir schon, wie T_a wirkt

$$x(E) \mapsto x(E') = x(E) + a,$$

d.h. das Ereignis E wird auf ein Ereignis E' abgebildet, das wieder im Raum $M_4^{(\kappa)}$ liegt. Falls E aber ein Ereignis aus dem Raum $M_4^{(\lambda)}$ ist, das durch die Koordinatenzahlen $y(E)$ bestimmt wird, so ist die Wirkung der Translation T_a gegeben durch

$$T_a: y(E) \mapsto y(E') = (y(E) + a y(E) y(E) (1 + 2a y(E) + a a y(E) y(E))^{-1} \quad (67)$$

Sobald nun das Ereignis $E \notin M_4^{(\kappa)}$ ist, d.h. die Zahlen $y(E)$ die Relation $y(E) y(E) = 0$ erfüllen, sind alle Translationen T_a , die der Bedingung $2a \cdot y(E) = -1$ genügen, nicht mehr in ihrer Wirkung auf das Ereignis E definiert, wie man aus (67) unmittelbar ersehen kann. Mit anderen Worten, die Translationen lassen zwar den Raum $M_4^{(\kappa)}$ invariant, bilden aber Elemente von $M_4^{(\lambda)}$ aus der Vereinigungsmenge $M_4^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)}$ heraus ab. Um dieses Problem weiter behandeln zu können, definieren wir zunächst für die Menge $M_4^{(\kappa)} \times B_0^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)} \times B_0^{(\lambda)}$ bzw. $N_{(\kappa)}^5 \cup N_{(\lambda)}^5$ die Koordinaten

$$\eta^4 := 1/2(\kappa + \lambda), \quad \eta^5 := 1/2(\lambda - \kappa), \quad \tilde{\kappa} := \eta^1 - \eta^0, \quad \tilde{\lambda} := \eta^1 + \eta^0. \quad (68)$$

Für alle Ereignisse E mit $x(E)$ derart, daß $x^1(E) - x^0(E) \neq 0$ bzw. $x^1(E) + x^0(E) \neq 0$ ist, betrachten wir die Maßstäbe

$$\hat{b}_E^{(\tilde{\kappa})} := (x^1 - x^0) \hat{b}_E^{(\kappa)} \quad \text{bzw.} \quad \hat{b}_E^{(\tilde{\lambda})} := (x^1 + x^0) \hat{b}_E^{(\kappa)}. \quad (69)$$

Als wir den Raum $M_4^{(\lambda)}$ eingeführt haben, ordneten wir gewissen Ereignissen E aus $M_4^{(\kappa)}$ neue Koordinatenzahlen $y(E)$ zu, indem wir das Ereignis E mit einem in ganz bestimmter Weise von $x(E)$ abhängenden Maßstab $\hat{b}_E^{(\lambda)}$ von dem festen Ereignis $\tilde{E}$ in $M_4^{(\kappa)}$ aus neu

vermaßen und dann die Variablen y^j jeden beliebigen Wert annehmen ließen. Dabei benutzten wir die Systeme $[\hat{E}, \hat{b}_E^{(1)}]$, wo der Nullpunkt $\hat{E}$ für alle Ereignisse E derselbe war. Jetzt wollen wir zu jedem Ereignis E mit den Koordinatenzahlen $x(E)$ einen neuen Ursprung $\hat{E}_x$ mit den folgenden Koordinaten festlegen

$$x(\hat{E}_x) = (x^0 - 1/2(x \cdot x - 1), x^1 - 1/2(x \cdot x + 1), 0, 0) . \quad (70)$$

In dem System $[\hat{E}_x, \hat{b}_E^{(\tilde{\kappa})}]$ erhält man für das Ereignis E mit $x^1(E) - x^0(E) \neq 0$ mit Hilfe der Regeln $\mathcal{E}, \mathcal{L}$ die neuen Koordinatenzahlen

$$\begin{aligned} \tilde{x}^0 &= 1/2 \frac{x \cdot x - 1}{x^1 - x^0}, \tilde{x}^1 = 1/2 \frac{x \cdot x + 1}{x^1 - x^0}, \tilde{x}^2 = \frac{x^2}{x^1 - x^0}, \tilde{x}^3 = \frac{x^3}{x^1 - x^0}, \\ \text{bzw.} \\ x^0 &= 1/2 \frac{\tilde{x} \cdot \tilde{x} - 1}{\tilde{x}^1 - \tilde{x}^0}, x^1 = 1/2 \frac{\tilde{x} \cdot \tilde{x} + 1}{\tilde{x}^1 - \tilde{x}^0}, x^2 = \frac{\tilde{x}^2}{\tilde{x}^1 - \tilde{x}^0}, x^3 = \frac{\tilde{x}^3}{\tilde{x}^1 - \tilde{x}^0} . \end{aligned} \quad (71)$$

Wie wir oben die Mannigfaltigkeit $M_4^{(\lambda)}$ definiert haben, so wird jetzt in vollkommen analoger Weise eine Mannigfaltigkeit $M_4^{(\tilde{\kappa})}$ bzw. $M_4^{(\tilde{\kappa})} \times B_0^{(\tilde{\kappa})}$ konstruiert

$$M_4^{(\tilde{\kappa})} := \{ E^{(\tilde{\kappa})} : \mathcal{E}[\hat{E}_x, \hat{b}_E^{(\tilde{\kappa})}](E^{(\tilde{\kappa})}) = \tilde{x}^j \hat{b}_E^{(\tilde{\kappa})}{}_j, \tilde{x}^j \in \mathbb{R}^1, j=0, \dots, 3 \} \quad (72)$$

$$\text{bzw.} \quad B_0^{(\tilde{\kappa})} := \{ b^{(\tilde{\kappa})} : b^{(\tilde{\kappa})} = (\tilde{\kappa}_b^{(\tilde{\kappa})})^{-1} \hat{b}^{(\tilde{\kappa})} \} .$$

Die Mannigfaltigkeit $M_4^{(\tilde{\kappa})}$ hat einen nicht leeren Durchschnitt mit $M_4^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)}$, andererseits gibt es Ereignisse E in $M_4^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)}$ die nicht in der Mannigfaltigkeit $M_4^{(\tilde{\kappa})}$ liegen und auch umgekehrt. Die Vereinigungsmenge $M_4^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)} \cup M_4^{(\tilde{\kappa})}$ ist damit eine echte Erweiterung obiger beiden Mannigfaltigkeiten.

Aber auch diese Erweiterung reicht noch nicht aus, die Wirkung der Konformen Gruppe überall definieren zu können. Denn ein Ereignis $E^{(\tilde{\kappa})} \in M_4^{(\tilde{\kappa})}$, das nicht in $M_4^{(\kappa)} \cup M_4^{(\lambda)}$ liegt, wird im allgemeinen durch eine Lorentztransformation Λ aus dem Raum $M_4^{(\tilde{\kappa})}$ hinaus abgebildet. Dies folgt einmal aus der Tatsache, daß die beiden Räume $M_4^{(\kappa)}$ und $M_4^{(\lambda)}$ unter Lorentztransformationen invariant sind, andererseits sich aber $\tilde{\kappa}$, das ja die Maßstäbe im Raum $M_4^{(\tilde{\kappa})}$ charakterisiert, wie die Größe $\gamma^1 - \gamma^0$ transformiert

und somit sicher durch eine Lorentztransformation zum Verschwinden gebracht werden kann.

Deshalb definieren wir noch Koordinaten $\tilde{y}$ mit Hilfe der in (69) eingeführten Maßstäbe $\hat{b}_E^{(\tilde{\lambda})}$ in dem zu (70) analogen System $[\hat{E}_x, \hat{b}_E^{(\tilde{\lambda})}]$. Dabei erhält ein Ereignis E aus $M_4^{(\kappa)}$ mit den Koordinatenzahlen $x(E)$, die die Relation $x^0(E) + x^1(E) \neq 0$ erfüllen, die neuen Koordinaten

$$\tilde{y}^0 = 1/2 \frac{x \cdot x - 1}{x^0 + x^1}, \quad \tilde{y}^1 = 1/2 \frac{xx+1}{x^0+x^1}, \quad \tilde{y}^2 = \frac{x^2}{x^0+x^1}, \quad \tilde{y}^3 = \frac{x^3}{x^0+x^1}$$

bzw.

(73)

$$x^0 = -1/2 \frac{\tilde{y}\tilde{y} - 1}{\tilde{y}^1 - \tilde{y}^0}, \quad x^1 = 1/2 \frac{\tilde{y}\tilde{y}+1}{\tilde{y}^1 - \tilde{y}^0}, \quad x^2 = \frac{\tilde{y}^2}{\tilde{y}^1 - \tilde{y}^0}, \quad x^3 = \frac{\tilde{y}^3}{\tilde{y}^1 - \tilde{y}^0}.$$

Die gleiche Argumentation wie im Fall der Koordinaten y und $\tilde{x}$ liefert uns dann eine Mannigfaltigkeit $M_4^{(\tilde{\lambda})}$ von Ereignissen $E^{(\tilde{\lambda})}$ und eine Menge $B_0^{(\tilde{\lambda})}$ von Maßstäben $\hat{b}^{(\tilde{\lambda})}$, die durch die Zahl $\tilde{\lambda}$ vermöge der Beziehung $\hat{b}^{(\tilde{\lambda})} = (\tilde{\lambda} \hat{b}(b))^{-1} \hat{b}^{(\tilde{\lambda})}$ charakterisiert werden können.

Bezeichne nun z das Tupel $(\kappa, \lambda, \tilde{\kappa}, \tilde{\lambda})$, dann sei

$$M_C^4 = \bigcup_{\alpha \in z} M_4^{(\alpha)} \quad (74)$$

die Vereinigung der vier Mannigfaltigkeiten $M_4^{(\alpha)}$, die wir oben der Reihe nach eingeführt hatten. Um zu zeigen, daß auf der Mannigfaltigkeit M_C^4 die Gruppe $C_{15}[1, a, \rho, c]$ der konformen Transformationen stetig wirkt, wollen wir noch den Zusammenhang zwischen den Koordinatenzahlen $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{y}$ und den Koordinaten $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$ und γ^5 herstellen. Aus den Relationen (71), (74) und den Definitionen (68) erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{x}^0 &= \tilde{\kappa}^{-1} \gamma^5, \quad \tilde{x}^1 = \tilde{\kappa}^{-1} \gamma^4, \quad \tilde{x}^2 = \tilde{\kappa}^{-1} \gamma^2, \quad \tilde{x}^3 = \tilde{\kappa}^{-1} \gamma^3, \quad \tilde{\kappa} \neq 0 \\ \tilde{y}^0 &= \tilde{\lambda}^{-1} \gamma^5, \quad \tilde{y}^1 = \tilde{\lambda}^{-1} \gamma^4, \quad \tilde{y}^2 = \tilde{\lambda}^{-1} \gamma^2, \quad \tilde{y}^3 = \tilde{\lambda}^{-1} \gamma^3, \quad \tilde{\lambda} \neq 0, \end{aligned} \quad (75)$$

wo die Zahlen $\gamma^5, \gamma^4, \gamma^3$ und γ^2 mit Hilfe der Maßstäbe

$$\hat{b}^{(\tilde{\kappa})} = \frac{1}{\tilde{\kappa} \hat{b}(b)} \hat{b}^{(\tilde{\kappa})} \quad \text{bzw.} \quad \hat{b}^{(\tilde{\lambda})} = \frac{1}{\tilde{\lambda} \hat{b}(b)} \hat{b}^{(\tilde{\lambda})}$$

und unter Gebrauch des Ursprungs $\hat{E}_x$ bestimmt werden.

In vollkommener Analogie zu den Fällen κ und λ betrachten

wir die Mannigfaltigkeiten $M_4^{(\tilde{\kappa})} \times B_0^{(\tilde{\kappa})}$ und $M_4^{(\tilde{\lambda})} \times B_0^{(\tilde{\lambda})}$, die zu den Räumen

$$N_{(\tilde{\kappa})}^5 := \{ (\gamma^5, \gamma^4, \gamma^2, \gamma^3, \tilde{\kappa}) : \gamma^j \in \mathbb{R}^1, j = 2, \dots, 5, \tilde{\kappa} \in \mathbb{R}_0 \}$$

bzw.

$N_{(\tilde{\lambda})}^5 := \{ (\gamma^5, \gamma^4, \gamma^2, \gamma^3, \tilde{\lambda}) : \gamma^j \in \mathbb{R}^1, j = 2, \dots, 5, \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}_0 \}$.homomorph sind. Definieren wir weiter auf $N_{(\tilde{\kappa})}^5$ die Koordinate

$$\tilde{\lambda} := \tilde{\kappa}^{-1} ((\gamma^5)^2 - (\gamma^4)^2 - (\gamma^3)^2 - (\gamma^2)^2)$$

und auf $N_{(\tilde{\lambda})}^5$ die Koordinate

$$\tilde{\kappa} := \tilde{\lambda}^{-1} ((\gamma^5)^2 - (\gamma^4)^2 - (\gamma^3)^2 - (\gamma^2)^2),$$

so gilt auf der Vereinigung der vier Räume $N_{(\alpha)}^5, \alpha \in \mathbb{Z}$, die Relation (64). Auf Grund unserer Konstruktion der Mannigfaltigkeiten $M_4^{(\alpha)} \times B_0^{(\alpha)}, \alpha \in \mathbb{Z}$, und der Relation (65) ist es klar, daß die Menge $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} N_{(\alpha)}^5$ homeomorph zu der Menge

$$Q_0^5 := \{ (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \kappa, \lambda) \in \mathbb{R}^6 \setminus \{0\} : \gamma^j \gamma_j - \kappa \lambda = 0 \} \quad (76)$$

ist. Dies folgt einfach aus der Tatsache, daß mindestens eine der Zahlen $\kappa, \lambda, \tilde{\kappa}$ oder $\tilde{\lambda}$ von Null verschieden ist, was in den Koordinaten γ ausgedrückt gerade den Punkt $(\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^5) = 0 \in \mathbb{R}^6$ ausschließt. Die Relation (65) ergibt dann sogar $(\gamma^0, \gamma^5) \neq (0, 0)$ und $(\gamma^1, \dots, \gamma^4) \neq (0, 0, 0, 0)$.

Schreibt man nun die Wirkung der 15-parametrischen konformen Gruppe $G_{15}[\lambda, a, \xi, c]$ in den homogenen Koordinaten $\gamma^\mu, \mu = 0, 1, \dots, 5$, aufgefaßt als Koordinaten im $\mathbb{R}^6$, so erhält man eine lineare Darstellung der konformen Gruppe G_{15} ¹⁾

$$G_{15}[\lambda, a, \xi, c] \ni W : \gamma^\mu \mapsto \gamma'^\mu = W^\mu_\nu \gamma^\nu, \quad (77)$$

also insbesondere auch eine stetige Abbildung im Raum Q_0^5 , der in (76) definiert worden war, da die Form $\gamma^j \gamma_j - \kappa \lambda$ unter der Abbildung (77) invariant gelassen wird.

Die Mengen $N_{(\alpha)}^5, \alpha \in \mathbb{Z}$, bilden lokale Koordinatensysteme für die differenzierbare Mannigfaltigkeit

$$K^5(E, b) := \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} M_4^{(\alpha)} \times B_0^{(\alpha)} \quad (78)$$

der Ereignisse E und der Maßstäbe b . Auf Grund der Relation (76) ist dann $K^5(E, b)$ homeomorph zu der Untermenge Q_0^5 des 6-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}_0^6$ mit der quadratischen Form $g_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu$, mit $g^{00} = g^{55} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = -g^{44}$ und $g^{\mu\nu} = 0$ falls $\mu \neq \nu$, und $\mathbb{R}_0^6 = \mathbb{R}^6 \setminus \{0\}$ sein soll. Die Relation (78) zeigt, daß $K^5(E, b)$ nicht mehr das direkte Produkt zweier endlichdimensionaler Vektorräume ist. Aus der Definition der Mannigfaltigkeit M_C^4 in (74) und der Definition von $K^5(E, b)$ in (78) folgt

$$M_C^4 = K^5(E, b) / A, \quad (79)$$

wobei A die multiplikative Gruppe der reellen Zahlen ist. Dies zeigt, daß man die Mannigfaltigkeit $K^5(E, b)$ mathematisch als Bündelraum eines Hauptfaserbündels $(K^5(E, b), M_C^4, \mathbb{R}^5, A, \cdot)$ mit dem Basisraum M_C^4 , der Faser $\mathbb{R}^5$, der effektiven Gruppe A von Homeomorphismen und der kanonischen Projektion

$$\pi: K^5(E, b) \longrightarrow M_C^4 = K^5(E, b) / A,$$

auffassen kann. (Siehe z.B. J.T. Schwarz: Differential Geometry and Topology, Gordon & Breach, 1968, p. 57). Dies ist ein entscheidender Unterschied zur Struktur der Mannigfaltigkeit $M_4^E \times B_0$, die man gewöhnlich physikalischen Überlegungen zu Grunde legt.

5. Einige topologische Eigenschaften der Räume $K^5(E, b)$ und M_C^4

Um die globalen topologischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten $K^5(E, b)$ und M_C^4 zu sehen, betrachten wir die Relationen (76) und (79). Die Teilmenge Q_0^5 des Raumes $\mathbb{R}_0^6$ kann auch charakterisiert werden als die Menge aller Punkte $q = (\eta^0, \dots, \eta^4, \eta^5) \in \mathbb{R}_0^6$, die die Relation $(\eta^0)^2 + (\eta^5)^2 = (\eta^1)^2 + \dots + (\eta^4)^2$ erfüllen. Daraus folgt aber

$$Q_0^5 \sim S_1 \times S_3 \times \mathbb{R}^+, \quad (80)$$

wobei S_n die n -dimensionale Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet. Da die S_3 und der Raum $\mathbb{R}^+$ einfach zusammenhängend, die S_1 jedoch unendlich-fach zusammenhängend ist - die Fundamentalgruppe ist gerade $\mathbb{Z}$ - ist auch die Mannigfaltigkeit Q_0^5 unendlich-fach zusammenhängend.

Um die Struktur des Raumes M_C^4 beschreiben zu können, bezeichne $Z_2(6)$ die Gruppe $\{+1_6, -1_6\}$, wo 1_6 die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^6$ darstellt. Wir bemerken, daß man den 5-dimensionalen Projektiven Raum $\mathbb{P}_5$ auf zwei Weisen darstellen kann

$$\mathbb{P}_5 \sim \mathbb{R}_0^6 / A \sim S_5 / Z_2(6). \quad (81)$$

In gleicher Weise erhalten wir für den Raum M_C^4 die Darstellungen

$$M_C^4 \sim Q_0^5 / A \sim (S_1 \times S_3) / Z_2(6). \quad (82)$$

Dies sieht man sofort, wenn man den folgenden Repräsentanten $q = (\gamma^0, \dots, \gamma^5)$ der Äquivalenzklasse $[q] = \{q^1 \hat{=} q^2 \times q^1 = \alpha q^2, \alpha \in A\}$ nimmt, der der Bedingung

$$(\gamma^0)^2 + (\gamma^5)^2 = 1 = (\gamma^1)^2 + (\gamma^2)^2 + (\gamma^3)^2 + (\gamma^4)^2$$

genügt. Die Relation (82) zeigt uns, daß der Raum M_C^4 ein kompakter Hausdorff-Raum ist, wenn er mit der auf Q_0^5 / A induzierten Quotiententopologie versehen ist. Dies folgt auch aus der Tatsache, daß der Raum M_C^4 als algebraische Mannigfaltigkeit eines Projektiven Raumes aufgefaßt werden kann. Der kompakte Torus $S_1 \times S_3$ bildet einen zweifachen Überlagerungsraum für die Mannigfaltigkeit M_C^4 . Deshalb ist auch der kompaktifizierte Minkowski-Raum M_C^4 unendlich fach zusammenhängend und hat den Raum $\mathbb{R} \times S_3$ als universellen Überlagerungsraum.

Bezeichnen wir mit $Dg(Z_2(2) \times Z_2(4))$ die Untergruppe von $Z_2(2) \times Z_2(4)$, die aus den Elementen $(1_2 \times 1_4)$ und $(-1_2 \times -1_4)$ besteht, so können wir auch schreiben

$$M_C^4 \sim (S_1 \times S_3) / Dg(Z_2(2) \times Z_2(4)), \quad (83)$$

da ja $Z_2(6) \cong Dg(Z_2(2) \times Z_2(4))$ ist.

Zu den lokalen topologischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten $K^5(E, b)$ und M_C^4 ist nicht mehr viel zu sagen. Auf Grund der Konstruktion von $K^5(E, b)$ ist diese Mannigfaltigkeit lokal homeomorph zu den Räumen $M_4^{(\alpha)} \times B_0^{(\alpha)}$ und damit auch lokal homeomorph zu den Räumen $N_{(\alpha)}^5$. Man kann deshalb die Mengen $N_{(\alpha)}^5$ als lokale Karten der Mannigfaltigkeit Q_0^5 in (76) auffassen; dies wollen wir damit deutlich machen, daß wir dann $\hat{N}_{(\alpha)}^5$ schreiben,

$$\text{also} \quad Q_0^5 = \bigcup_{\alpha \in Z} \hat{N}_{(\alpha)}^5 \quad \text{setzen.} \quad (84)$$

Der kompaktifizierte Minkowski-Raum Q_0^5 / A kann dann dargestellt werden als

$$Q_0^5 / A = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} U(\alpha) \quad , \quad (85)$$

wobei die $U(\alpha) := \hat{N}_{(\alpha)}^5 / A$ für alle $\alpha \in \mathbb{Z}$ offene Mengen sind, die die Mannigfaltigkeit M_c^4 überdecken. Definieren wir noch die folgenden vier Homeomorphismen $\varphi_\alpha: U(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^4$ durch

$$\varphi_\alpha: (\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^5) \longmapsto \alpha^{-1}(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \quad \text{für } \alpha = \kappa, \lambda$$

bzw.

(86)

$$\varphi_\alpha: (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^5) \longmapsto \alpha^{-1}(\gamma^5, \gamma^4, \gamma^2, \gamma^3) \quad \text{für } \alpha = \tilde{\kappa}, \tilde{\lambda}$$

so bildet das System der $(U(\alpha), \varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ einen vollständigen Atlas der C^∞ -Mannigfaltigkeit Q_0^5 / A , die ja auf Grund von (82) homeomorph zur Mannigfaltigkeit M_c^4 ist. Es ist klar, daß die mathematische Beschreibung der physikalischen Vorgänge in der Mannigfaltigkeit Q_0^5 / A als dem mathematischen Abbild der physikalischen Mannigfaltigkeit M_c^4 durchgeführt werden muß.

Wie man leicht nachrechnen kann, sind die Abbildungen

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$$

C^∞ Abbildungen im herkömmlichen Sinn. Da wir von der expliziten Gestalt dieser Abbildungen noch später Gebrauch machen werden, haben wir sie in einem Anhang D niedergeschrieben.

Wir wollen nun zu einer interessanten Darstellung unserer Mannigfaltigkeiten $K^5(E; b)$ und M_c^4 als homogenen Räumen kommen. Dazu müssen wir kurz die Wirkung der Transformationen $P_{10}[\lambda, a]$, $D_1[\xi]$ und $C_4[c]$ auf die Koordinaten γ angeben:

$$L_6[\lambda]: \gamma^j \longmapsto \gamma'^j = \lambda^j \gamma^k \quad \text{für } j = 0, 1, 2, 3 \quad (87a)$$

$$\kappa \longmapsto \kappa' = \kappa$$

$$\lambda \longmapsto \lambda' = \lambda$$

$$T_4[a]: \gamma^j \longmapsto \gamma'^j = \gamma^j + a^j \quad \text{für } j = 0, 1, 2, 3 \quad (87b)$$

$$\kappa \longmapsto \kappa' = \kappa$$

$$\lambda \longmapsto \lambda' = \lambda + a^k a_k \kappa + 2 a^k \gamma_k$$

$$D_1[\xi] : \begin{aligned} \gamma^j &\mapsto \gamma'^j = \gamma^j & j = 0, 1, 2, 3 \\ \kappa &\mapsto \kappa' = \xi^{-1} \kappa \\ \lambda &\mapsto \lambda' = \xi \lambda \end{aligned} \quad (87c)$$

$$I_R : \begin{aligned} \gamma^j &\mapsto \gamma'^j = \gamma^j & j = 0, 1, 2, 3 \\ \kappa &\mapsto \kappa' = -\lambda \\ \lambda &\mapsto \lambda' = -\kappa \end{aligned} \quad (87d)$$

$$C_4[c] : \begin{aligned} \gamma^j &\mapsto \gamma'^j = \gamma^j - c^j \lambda & j = 0, 1, 2, 3 \\ \kappa &\mapsto \kappa' = \kappa + c^k c_k \lambda - 2c^k \gamma_k \\ \lambda &\mapsto \lambda' = \lambda \end{aligned} \quad (87e)$$

Die Relationen (87) zeigen, daß die angegebenen Transformationen nicht nur den Ausdruck $\gamma^\mu \gamma_\mu = 0$ sondern auch die quadratische Form $\gamma^\mu \gamma_\mu$ invariant lassen. Es ist ferner klar, daß jede lineare Transformation, die die quadratische Form $\gamma^\mu \gamma_\mu$ im $\mathbb{R}^6$ invariant läßt, in den Räumen $\mathbb{R}_1^4(\alpha) := \varphi_\alpha(U_\alpha) = \varphi(M_4^{(\alpha)})$ eine konforme Transformation induziert. Das heißt, jedes Element W der pseudo-orthogonalen Gruppe $O(2,4)$, die ja gerade die Gruppe derjenigen linearen Transformationen im $\mathbb{R}^6$ ist, die die quadratische Form $\gamma^\mu \gamma_\mu$ invariant lassen, induziert eine konforme Abbildung in dem kompaktifizierten Minkowski-Raum M_C^4 . Aus der Darstellung (82) von M_C^4 als Quotientenraum Q_0^5/A ist klar, daß die Gruppe $O(2,4)$ auf M_C^4 nicht effektiv wirkt, d.h. es gibt Elemente $W \in O(2,4)$ mit $W \neq 1_6$, die alle Punkte der Mannigfaltigkeit M_C^4 invariant lassen. Die einzigen beiden Elemente der Gruppe $O(2,4)$ mit dieser Eigenschaft sind die Transformationen $W_1 = 1_6$ und $W_2 = -1_6$, die gerade die Gruppe $Z_2(6)$ bilden. Diese Untergruppe der $O(2,4)$ wirkt demnach wie die Identität auf dem Raum M_C^4 bzw. Q_0^5/A . Da $Z_2(6)$ Normalteiler von $O(2,4)$ ist, ist es sinnvoll die Gruppe $O(2,4) / Z_2(6)$ zu betrachten. Diese Gruppe wirkt offensichtlich effektiv auf M_C^4 bzw. Q_0^5/A und es ist daher zunächst angebracht, die Gruppe $O(2,4) / Z_2(6)$ mit der Konformen Gruppe $C_{15}[\lambda, a, \xi, c]$ des kompaktifizierten Raums M_C^4 zu identifizieren. An dieser Stelle wollen wir an die wichtigsten Eigenschaften der Gruppe $O(2,4)$ erinnern:

Sei $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \xi^5) \in \mathbb{R}_2^6$ und $W = (W^\mu{}_\nu) \in O(2,4)$, dann induziert W in $\mathbb{R}_2^6$ die folgende Transformation

$$\xi^\mu \longmapsto \hat{\xi}^\mu = W^\mu{}_\nu \xi^\nu \quad (88)$$

und es gilt $\hat{\xi}^\mu \hat{\xi}_\mu = \xi^\mu \xi_\mu$, $\xi_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\nu$, wobei $g^{00} = g^{55} = -g^{11} = \dots = -g^{44} = 1$ und $g^{\mu\nu} = 0$ falls $\mu \neq \nu$. Aus (88) folgt sofort $W^T g W = g$, wo W^T die transponierte Matrix von W und g der obige Fundamentaltensor ist.

Die Gruppe $O(2,4)$ besteht aus vier zusammenhängenden Komponenten, die wie folgt definiert sind

$$SO^\uparrow(2,4) : \det W = +1, \text{ sign}(W^0{}_0 W^5{}_5 - W^0{}_5 W^5{}_0) = \varepsilon_{05} = +1,$$

$$SO^\psi(2,4) : \det W = +1, \varepsilon_{05} = -1,$$

$$O_-^\uparrow(2,4) : \det W = -1, \varepsilon_{05} = +1,$$

$$O_-^\psi(2,4) : \det W = -1, \varepsilon_{05} = -1.$$

Von nun an wollen wir unter den Gruppen $L_6[\uparrow]$, $T_4[a]$, $C_4[c]$ und $D_1[\xi]$ immer die entsprechenden Transformationen im Raum M_C^4 bzw. Q_0^3/A oder auch allgemein im Raum $\mathbb{R}_2^6$ verstehen. Es macht keine Schwierigkeiten, diese Transformationen mittels der Beziehungen (87) in 6×6 Matrizen zu schreiben. Man sieht dann

$$L_{6+}^\uparrow \subset SO^\uparrow(2,4), \quad L_{6+}^\psi \subset SO^\psi(2,4),$$

$$T_4[a] \subset SO^\uparrow(2,4), \quad C_4[c] \subset SO^\uparrow(2,4),$$

$$D_1[\xi] \subset SO^\uparrow(2,4), \quad I_\tau \subset O_-^\uparrow(2,4) \text{ usw.}$$

Da nun alle maximal kompakten Untergruppen einer zusammenhängenden, halbeinfachen Liegruppe zueinander konjugiert unter einem inneren Automorphismus sind²⁹⁾, gilt, daß alle maximal kompakten Untergruppen von $SO^\uparrow(2,4)$ konjugiert zu $SO(2) \oplus SO(4)$ sind. Weiter ist die mit der Eins zusammenhängende Gruppe $SO^\uparrow(2,4)$ homeomorph (d.h. topologisch äquivalent) zu dem Raum³⁰⁾

$$SO(2) \times SO(4) \times \mathbb{R}^8.$$

Da die Gruppe $SO(2)$ unendlichfach und die $SO(4)$ zweifach zusammenhängend ist, ist auch die Gruppe $SO^\uparrow(2,4)$ unendlichfach

zusammenhängend. Falls $\widetilde{SO}^\uparrow(2,4)$ die universelle Überlagerungsgruppe von $SO^\uparrow(2,4)$ und $\widetilde{K}$ der Kern des Homomorphismus

$$\widetilde{SO}^\uparrow(2,4) \longrightarrow SO^\uparrow(2,4)$$

ist, so gilt³¹⁾

$$\widetilde{K} = Z(2) \times Z(4),$$

wo $Z(2)$ die zyklische Gruppe der Ordnung ∞ und $Z(4)$ die zyklische Gruppe der Ordnung 2 ist. Daraus folgt insbesondere, daß $SO^\uparrow(2,4)$ nicht kompakt ist.

5.1. Die Mannigfaltigkeit $K^5(E,b)$ bzw. Q_0^5 als homogener Raum

Zunächst wollen wir zeigen, daß die Gruppe $SO^\uparrow(2,4)$ auf dem Raum Q_0^5 transitiv wirkt, d.h. zu je zwei Punkten q_1 und $q_2 \in Q_0^5$ gibt es ein Element $W \in SO^\uparrow(2,4)$ mit $q_2 = W q_1$. Seien also $q_1 = (\gamma^1)$ und $q_2 = (\gamma^2)$ zwei beliebig vorgegebene Punkte aus Q_0^5 . Es sei $SO(2)$ diejenige Untergruppe von $SO^\uparrow(2,4)$, die auf die Komponenten (γ^0, γ^5) wie die $SO(2)$ in zwei Dimensionen wirkt, die aber auf die Komponenten $(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4)$ wie die Einheit wirkt; $SO(4)$ sei die Untergruppe mit einer entsprechenden Wirkung auf die Komponenten $(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4)$. Dann gibt es zu dem vorgegebenen q_1 eine Transformation $g_1 \in SO(2) \times SO(4)$, sodaß

$$g_1 q_1 = \hat{q} = (\hat{\gamma}^0, \hat{\gamma}^1, 0, 0, 0, 0), \quad \hat{\gamma}^0 = \hat{\gamma}^1 > 0.$$

Weiter gibt es eine Transformation $\hat{g}_1$ aus der 1-parametrischen speziellen Lorentzgruppe, die in der 0-1 Ebene wirkt, mit

$$\hat{g}_1 \hat{q} = \hat{q} = (1, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Es ist klar, daß man vollkommen analog auch den Punkt q_2 in den Punkt $\hat{q} = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$ mittels einer geeigneten Transformation $\hat{g}_2 \circ g_2$ aus $SO^\uparrow(2,4)$ überführen kann. Dann gilt aber

$$q_2 = g_2^{-1} \circ \hat{g}_2^{-1} \circ \hat{g}_1 \circ g_1 q_1,$$

wobei die Transformation $g_2^{-1} \circ \hat{g}_2^{-1} \circ \hat{g}_1 \circ g_1$ ein Element der Gruppe $SO^\uparrow(2,4)$ ist.

Die Isotropiegruppe des Punktes $q = (0, 0, 0, 0, \kappa=1, \lambda=0) \in Q_0^5$

ist die Untergruppe $L_{6+}[\lambda] \rtimes C_4[c]$ der Gruppe $SO^\uparrow(2,4)$. Damit existiert der folgende Homeomorphismus

$$\begin{aligned} Q_0^5 &\sim SO^\uparrow(2,4) / \{L_{6+}[\lambda] \rtimes C_4[c]\} \quad \text{bzw.} \\ Q_0^5 &\sim SO^\uparrow(2,4) / \{L_{6+}[\lambda] \rtimes T_4[a]\} \end{aligned} \quad (89)$$

Man kann aber jeden homogenen Raum auffassen als Basisraum eines Hauptfaserbündels ³²⁾³³⁾ mit der Isotropiegruppe als Strukturgruppe. Deshalb kann die Mannigfaltigkeit Q_0^5 auch als homogener Raum dargestellt werden, wobei man vom reduzierten Faserbündel Gebrauch macht. In unserem Fall ist dabei die reduzierte Strukturgruppe durch die maximal kompakte Untergruppe $SO(3)$ der Gruppe $L_{6+}[\lambda] \rtimes T_4[a]$ gegeben. Dabei verstehen wir unter $SO(3)$ diejenige Gruppe, die allein auf die Komponenten $(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ nicht trivial wie die Einheit wirkt.

Um ein solches reduziertes Faserbündel explizit zu konstruieren, betrachten wir die Gruppe $A^+(6) \times SO(2) \times SO(4)$, wo die Gruppe $SO(2)$ auf die Komponenten (γ^0, γ^5) und die Gruppe $SO(4)$ auf die Komponenten $(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4)$ in nicht trivialer Weise wirken. Es ist leicht einzusehen, daß obige Gruppe auf der Mannigfaltigkeit Q_0^5 transitiv wirkt: wie wir schon oben gezeigt haben, existiert zu jedem Punkt $q \in Q_0^5$ ein Element $g \in SO(2) \times SO(4)$, das diesen Punkt in den Punkt $\hat{q} = (\hat{\gamma}^0, \hat{\gamma}^1, 0, 0, 0, 0)$ mit $\hat{\gamma}^0 = +\sqrt{(\gamma^0)^2 + (\gamma^5)^2}$ $\hat{\gamma}^1 = +\sqrt{(\gamma^1)^2 + \dots + (\gamma^4)^2} = \hat{\gamma}^0$ abbildet, also $g \cdot q = \hat{q}$. Multiplikation mit dem Faktor $1/\hat{\gamma}^0$ führt uns schließlich zu dem Punkt $\bar{q} = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$. Die gleiche Argumentation wie oben ergibt dann die transitive Wirkung der Gruppe $A^+(6) \times SO(2) \times SO(4)$ auf der Mannigfaltigkeit Q_0^5 . Die Isotropiegruppe des Punktes $q = (0, 0, 0, 0, \kappa = 1, \lambda = 0) \in Q_0^5$ ist die Untergruppe $SO(3)$ der Gruppe $A^+(6) \times SO(2) \times SO(4)$. Die Untergruppe $SO(3)$ soll dabei wieder auf die Komponenten $(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ wirken. Damit erhalten wir den Homeomorphismus

$$Q_0^5 \sim [A^+(6) \times SO(2) \times SO(4)] / SO(3) . \quad (90)$$

Seien π^1 die kanonische Abbildung

$$\pi^1 : SO^\uparrow(2,4) \longrightarrow SO^\uparrow(2,4) / P_{10}[\lambda, a] \sim Q_0^5$$

und π^2 die kanonische Abbildung

$$\pi^2: A^+(6) \times SO(2) \times SO(4) \longrightarrow \{A^+(6) \times SO(2) \times SO(4)\} / SO(3) \sim Q_0^5,$$

dann wollen wir zeigen, daß das Hauptfaserbündel H_1

$$H_1 := (A^+(6) \times SO(2) \times SO(4), \pi^2, Q_0^5)$$

mit der Strukturgruppe $SO(3)$ eine Reduktion des Hauptfaserbündels H_2

$$H_2 := (SO^\uparrow(2,4), \pi^1, Q_0^5)$$

mit der Strukturgruppe $P_{10}[\wedge, a]$ ist. Dies sieht man wie folgt: es ist klar, daß die Gruppe $SO(3)$ eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe $P_{10}[\wedge, a]$ ist. Weiter definieren wir die folgende Abbildung $\hat{\alpha}$ des Bündelraums $A^+(6) \times SO(2) \times SO(4)$ von H_1 in den Bündelraum $SO^\uparrow(2,4)$ von H_2

$$\hat{\alpha} : \alpha \cdot g \longmapsto D_1(\alpha) \cdot g \quad (91)$$

für beliebige $\alpha \in A^+(6)$, $g \in SO(2) \times SO(4)$. $D_1(\alpha)$ ist dabei diejenige Dilatation, die durch den Parameter $\xi = \alpha$ wie in (29) definiert, charakterisiert wird. Die Abbildung $\hat{\alpha}$ in (91) hat die folgenden Eigenschaften

- a) $\hat{\alpha}$ ist injektiv
- b) $\hat{\alpha}$ ist ein Homeomorphismus von $A^+(6) \times SO(2) \times SO(4)$ auf die abgeschlossene Untermenge $\hat{\alpha}(A^+(6) \times SO(2) \times SO(4)) \subset SO^\uparrow(2,4)$
- c) $\hat{\alpha}(s_1 \cdot s_2) = \hat{\alpha}(s_1) \cdot s_2$ für alle $s_1 \in A^+(6) \times SO(2) \times SO(4)$ und alle $s_2 \in SO(3)$.

Diese Eigenschaften a), b) und c) der Abbildung $\hat{\alpha}$ in (91) beweisen unmittelbar ³³⁾, daß das Faserbündel H_1 mit der Strukturgruppe $SO(3)$ eine Reduktion des Faserbündels H_2 mit der Strukturgruppe $P_{10}[\wedge, a]$ ist.

5.2. Die Mannigfaltigkeit M_c^4 bzw. Q_0^5 / A als homogener Raum

Zunächst ist klar, daß die Gruppe $SO^\uparrow(2,4)$ auch auf der Mannigfaltigkeit Q_0^5 / A transitiv wirkt. Dies folgt z.B. daraus, daß schon die Untergruppe $SO(2) \times SO(4)$, wie wir sie im letzten Abschnitt

betrachtet hatten, transitiv auf Q_0^5/A wirkt. Denn wie wir gesehen haben, existiert zu beliebigem $q \in Q_0^5$ ein Element der Gruppe $SO(2) \times SO(4)$, derart daß

$$g \cdot q = \hat{q} = (\hat{\eta}^0, \hat{\eta}^1, 0, 0, 0, 0)$$

mit $\hat{\eta}^0 = \hat{\eta}^1 > 0$. Der Punkt $\hat{q}$ aber ist ein Repräsentant des Elementes $[\hat{q}] \in Q_0^5/A$, das auch vom Punkt $q = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$ repräsentiert wird. Übersetzt in den Raum Q_0^5/A heißt das: zu jedem $[q]$ aus Q_0^5/A existiert eine Transformation g aus $SO(2) \times SO(4)$ mit $g[q] = [\hat{q}]$, wo $[\hat{q}]$ die durch den Punkt $q \in Q_0^5$ erzeugte Äquivalenzklasse darstellen soll. Damit aber wirkt die Gruppe $SO(2) \times SO(4)$ und deshalb insbesondere die Gruppe $SO^\uparrow(2, 4)$ transitiv auf dem Raum Q_0^5/A . Da die Invarianzgruppe des Punktes $[(0, 0, 0, 0, k=0, \lambda \neq 0)] \in Q_0^5/A$ bezüglich der Gruppe $SO^\uparrow(2, 4)$ gerade die Gruppe $((L_{6+}[\lambda] \otimes D_1[\xi]) \rtimes T_4[a]) \otimes Z_2(6)$ ist, so erhalten wir den Homeomorphismus

$$M_c^4 \sim SO^\uparrow(2, 4) / \{ ((L_{6+} \otimes D_1) \rtimes T_4) \otimes Z_2(6) \}. \quad (92)$$

Wenn wir auch in diesem Fall wieder den Begriff des Hauptfaserbündels verwenden wollen, so ist hier die Konstruktion eines reduzierten Bündels, das zu dem gleichen M_c^4 führen soll, etwas einfacher. Die maximal kompakte Untergruppe der Strukturgruppe $\{(L_{6+} \otimes D_1) \rtimes T_4\} \otimes Z_2(6)$ ist die Gruppe $SO(3) \times Z_2(6)$. Die transitiv wirkende Transformationsgruppe ist die schon oben erwähnte Gruppe $SO(2) \times SO(4)$. Damit erhält man mit Hilfe des reduzierten Bündels

$$M_c^4 \sim (SO(2) \times SO(4)) / (SO(3) \times Z_2(6)). \quad (93)$$

Bevor wir nun dazu übergehen im Rahmen der oben diskutierten Mannigfaltigkeiten gewisse physikalische Probleme zu behandeln, sollen nun kurz noch einige Eigenschaften der Tangential- und Kotangentialräume der Mannigfaltigkeiten $K^5(E, b)$ und M_c^4 bzw. ihrer mathematischen Realisierungen Q_0^5 und Q_0^5/A beschrieben werden, die vor allen Dingen im Hinblick auf das Problem der Kausalität in einer konforminvarianten Welt von großer Bedeutung sind. Da dieser Problemkreis ausführlich in der Dissertationarbeit von Herrn T.H. Go²⁷⁾ behandelt ist, werden wir

hier nur eine Zusammenfassung der wichtigsten Überlegungen und Ergebnisse bringen, die Einzelheiten findet man in obiger Arbeit.

6. Das Problem der Kausalität in einer konforminvarianten Welt

Das entscheidende Hilfsmittel zur Definition der Zeitordnung bzw. Licht-, Raum- und Zeitartigkeit von zwei Ereignissen aus den Räumen $K^5(E, b)$ bzw. M_C^4 sind die Tangentialvektoren und die Vektorfelder dieser Mannigfaltigkeiten (siehe Anhang A). Diese Fragen waren in letzter Zeit oft unterschiedlich beantwortet worden, so daß viel Verwirrung gestiftet worden ist. Wir denken aber, im Rahmen unserer Überlegungen dieses Problem endgültig lösen zu können. Dies ist insbesondere auch deswegen von großer Bedeutung, weil obiges Problem eng mit der Existenz einer lokalen, konforminvarianten Feldtheorie zusammenhängt, zu deren Konstruktion diese Arbeit als eine Art Vorbereitung gedacht ist. Es ist klar, daß eine solche Feldtheorie sicher nicht existieren kann, wenn man keine Zeitordnung zwischen zwei Ereignissen einführen kann, oder wenn es nicht möglich ist zu sagen, wann zwei Ereignisse lichtartig, zeitartig oder raumartig zu einander liegen. Die letzte Aussage ist im Fall einer Theorie von Teilchen der Masse $m = 0$ noch dahingehend abzuschwächen, daß es genügt sagen zu können, wann zwei Ereignisse lichtartig oder nicht lichtartig zu einander liegen, da sich ja im diesem Fall die Teilchen sowieso nur mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können und damit sich auch nur lichtartig zu einander gelegene Ereignisse gegenseitig beeinflussen können.

6.1. Die Tangentialräume $T_q(Q_0^5)$ und die Kotangentialräume $T_q^*(Q_0^5)$

Wir betrachten die Mannigfaltigkeit $Q_0^5 = \bigcup_{x \in Z} N_{(x)}^5$ in (84)

als abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des Raumes $\mathbb{R}_2^6 = \mathbb{R}_2^6 \setminus \{0\}$ mit der Metrik $k(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2) = \gamma^{1,m} \gamma_{2,m}^2$ für zwei beliebige Elemente $\tilde{q}^1, \tilde{q}^2 \in \mathbb{R}_2^6$. Es ist dann klar, daß man Q_0^5 als die Menge aller isotropen Vektoren $\tilde{q} \in \mathbb{R}_2^6$ bezüglich der Metrik k auffassen kann

$$Q_0^5 = \left\{ \tilde{q} \in \mathbb{R}_2^6 : k(\tilde{q}, \tilde{q}) = 0 \right\}. \quad (94)$$

Für ein Element $\tilde{q} \in \mathbb{R}_2^6$ bezeichne $T_{\tilde{q}}(\mathbb{R}_2^6)$ den Tangentialraum

an den Punkt $\hat{q}$ in der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}_2^6$, analog bezeichne $T_q(Q_0^5)$ den Tangentialraum der Mannigfaltigkeit Q_0^5 in dem Punkt q . Betrachten wir dann einen Punkt $q \in Q_0^5$, so ist q auf Grund unserer Interpretation von Q_0^5 als Unterraum von $\mathbb{R}_2^6$ auch ein Element des letzt genannten Raumes. Man kann sich dann fragen, wann ein Tangentialvektor $X = a^\mu \partial_\mu \in T_q(\mathbb{R}_2^6)$ auch ein Element aus $T_q(Q_0^5)$ ist. Man sieht leicht, daß dies genau diejenigen Tangentialvektoren $a^\mu \partial_\mu$ im Punkt $q = (\gamma^0, \dots, \gamma^5) \in Q_0^5$ sind, deren Koordinaten a^μ der Bedingung

$$a^\mu \gamma_\mu = 0 \quad (95)$$

genügen. Benutzt man die lokalen Koordinaten in den vier Karten $\hat{N}_{(\alpha)}^5$, $\alpha \in z$, z.B. in der Karte $\hat{N}_{(\kappa)}^5$ die Koordinaten aus der Definition (54), so erhält man als allgemeinen Tangentialvektor $X^{(\kappa)} \in T_q(Q_0^5)$ für $q \in \hat{N}_{(\kappa)}^5$

$$X^{(\kappa)} = a^j \partial_j + a^{(\kappa)} \frac{\partial}{\partial \kappa}, \quad a^j, a^{(\kappa)} \in \mathbb{R}^1 \quad (96)$$

und vollkommen analoge Ausdrücke in den anderen Karten $\hat{N}_{(\alpha)}^5$. In den Koordinaten $(\gamma^j, \kappa, \lambda)$ nimmt der allgemeine Tangentialvektor $X = a^\mu \partial_\mu$ die Form

$$X = a^j \partial_j + a^{(\kappa)} \partial_\kappa + a^{(\lambda)} \partial_\lambda \quad (97)$$

an, wo $a^{(\kappa)} = a^4 - a^5$ und $a^{(\lambda)} = a^4 + a^5$ ist.

Der in den lokalen Koordinaten ausgedrückte Tangentialvektor $X^{(\kappa)}$ in $q \in \hat{N}_{(\kappa)}^5$ in dem Ausdruck (96) entspricht einem Tangentialvektor X in (97) mit $a^{(\lambda)} = (2\gamma^j a_j + \lambda a^{(\kappa)})/\kappa$.

Auf Grund der Relation (95) ist die Menge

$$\{ \gamma^\mu \partial_\nu - \gamma^\nu \partial_\mu, (\gamma) = q \in Q_0^5 \}_{\mu, \nu = 0, 1, \dots, 5}$$

ein Erzeugendensystem für den Tangentialraum $T_q(Q_0^5)$.

Der Dualraum von $T_q(Q_0^5)$ wird mit $T_q^*(Q_0^5)$ bezeichnet und heißt der Kotangentialraum der Mannigfaltigkeit Q_0^5 im Punkt q , oder auch Raum der Differentialformen 1. Ordnung. Der Vektorraum $T_q^*(Q_0^5)$ wird zum Beispiel aufgespannt von der Menge

$$\{ (\gamma^\mu d\gamma^\nu - \gamma^\nu d\gamma^\mu), q = (\gamma) \in Q_0^5 \}_{\mu, \nu = 0, 1, \dots, 5}.$$

Auf $T_q(\mathbb{R}_2^6)$ kann man mit Hilfe der Kotangentialvektoren $(d\gamma^\mu) \in T_q^*(\mathbb{R}_2^6)$ folgende Metrik einführen

$$h_{\tilde{q}} = d\gamma^\mu \otimes d\gamma_\mu, \quad (98)$$

sodaß für zwei beliebige Tangentialvektoren $X_1 = a^\mu \partial_\mu$ und $X_2 = b^\mu \partial_\mu \in T_{\tilde{q}}(\mathbb{R}_2^6)$ gilt:

$$h_{\tilde{q}}(a^\mu \partial_\mu, b^\mu \partial_\mu) = a^\mu b_\mu. \quad (99)$$

Aus der Eigenschaft (95) folgt sofort, daß die Metrik $h_{\tilde{q}}$ in (98) entartet ist, wenn man sie auf $Q_0^5 \subset \mathbb{R}_2^6$ einschränkt. Der Tangentialvektor $\gamma^\mu \partial_\mu \in T_q(Q_0^5)$ steht nämlich auf allen anderen Tangentialvektoren $a^\mu \partial_\mu \in T_q(Q_0^5)$ senkrecht, ohne daß er selbst der Nullvektor wäre.

Die Idee bei der Lösung der von uns zu Beginn dieses Kapitels erwähnten Probleme besteht darin, sie auf Eigenschaften von Tangentialvektoren und insbesondere von gewissen Vektorfeldern zurückzuführen.

Auf Grund der Invarianz des Ausdruckes $a^\mu(q) a_\mu(q)$ unter beliebigen Transformationen der Gruppe $O(2,4)$ ist es möglich, eine $O(2,4)$ invariante Definition von raum-, zeit- und lichtartigen Tangentialvektoren $a^\mu \partial_\mu$ auf der Mannigfaltigkeit Q_0^5 zu geben, nämlich durch

$$\text{sign } a^\mu(q) a_\mu(q) = \begin{cases} +1 & \text{zeitartig} \\ 0 & \text{lichtartig} \\ -1 & \text{raumartig} \end{cases}$$

Das Transformationsverhalten von $a^\mu \partial_\mu$ unter Elementen der Gruppe $O(2,4)$ ergibt sich aus der Beziehung (23).

6.2. Die Tangentialräume $T_{[q]}(Q_0^5/A)$

Nachdem wir in dem vorigem Absatz die Tangentialvektoren in jedem Punkt q der Mannigfaltigkeit Q_0^5 mit Hilfe der Koordinaten $\gamma^\mu, \mu=0,1,\dots,5$, ausgedrückt haben, ist es nun einfach, die Tangentialvektoren der Mannigfaltigkeit Q_0^5/A ebenfalls in den Koordinaten γ^μ niederzuschreiben. Dazu müssen wir uns nur der allgemein gültigen Relation (23) erinnern und bedenken, daß die Mannigfaltigkeit Q_0^5/A einfach durch kanonische Projektion von Q_0^5 erhalten wird:

$$\hat{\pi} : Q_0^5 \longrightarrow Q_0^5/A .$$

Damit sieht man sofort, daß man die Tangentialvektoren in einem Punkt $[q]$ von Q_0^5/A wie folgt charakterisieren kann: sei $q \in Q_0^5$ ein beliebiger Repräsentant der Klasse $[q] \in Q_0^5/A$. Dann definieren wir das Tangentialbündel

$$T_{[q]} := \bigcup_{\alpha \in A} T_{\alpha q}(Q_0^5). \quad (100)$$

Auf diesem Tangentialbündel betrachten wir die Menge V aller Vektorfelder $a^\mu(q) \partial_\mu$ mit der Eigenschaft

$$a^\mu(\alpha q) = \alpha a^\mu(q) \quad \text{für alle } \mu = 0, 1, \dots, 5. \quad (101)$$

Dies sind gerade alle A -invarianten Vektorfelder. In der Menge V führen wir schließlich noch die folgende Äquivalenzrelation ein

$$a^\mu(q) \partial_\mu \approx b^\mu(q) \partial_\mu \iff a^\mu(q) - b^\mu(q) = \alpha \gamma^\mu, \alpha \in \mathbb{R}_0.$$

Dann aber gilt

$$T_{[q]}(Q_0^5/A) = V / \approx. \quad (102)$$

Eine besondere Rolle in den Überlegungen Go's zur Frage der Kausalität spielen die auf ganz Q_0^5 A -invarianten Vektorfelder, die mittels $\hat{\pi}_*$ in Vektorfelder auf Q_0^5/A abgebildet werden. Sei also $a^\mu(q) \partial_\mu$ ein A -invariantes C^∞ -Vektorfeld auf Q_0^5 . Unter der Projektion $\hat{\pi}_*$ erhält man dann das folgende Vektorfeld auf Q_0^5/A , ausgedrückt in den lokalen Koordinaten φ_κ

$$\hat{\pi}_* (a^\mu(q) \partial_\mu) = S^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (103)$$

mit $S^j(x) = a^j(\frac{x}{\kappa}) - x^j a^{(\kappa)}(\frac{x}{\kappa})$ und $x^j = \frac{x^j}{\kappa}$ für $j=0, 1, 2, 3$.

Damit ergibt sich in der Karte $\varphi_\kappa(U_\kappa)$

$$S^j(x) S_j(x) = \kappa^{-2} a^\mu(\gamma) a_\mu(\gamma), \quad (104)$$

und vollkommen analoge Relationen gelten in den übrigen Karten $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Damit ist es aber möglich eine konforminvariante Definition von raum-, zeit- und lichtartigen Tangentialvektoren auf

der Mannigfaltigkeit Q_0^5/A zu geben. Die Relation (104) gilt natürlich auch dann, wenn $S^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$ kein Vektorfeld auf Q_0^5/A ist.

Um schließlich auf der Mannigfaltigkeit M_C^4 bzw. Q_0^5/A eine Zeitordnung einführen zu können, machen wir noch von zwei Theoremen Gebrauch, die wir an dieser Stelle formulieren wollen.

Theorem I. Sei $a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in T_q(Q_0^5)$, d.h. $a^\mu \eta_\mu = 0$. Dann ist der Ausdruck $\text{sign}(\gamma^0 a^5 - \gamma^5 a^0)$ eine Invariante der Gruppe $O(2,4)$ dann und nur dann, wenn $a^\mu a_\mu > 0$ ist.

Den Beweis dieses Theorems findet man in der Dissertationsarbeit von Herrn Go²⁷⁾. Das zweite Theorem hängt eng mit der topologischen Struktur der Mannigfaltigkeiten Q_0^5 bzw. Q_0^5/A zusammen, wie sie in den Relationen (80) bzw. (82) zum Ausdruck kommt.

Theorem II. Sei $X_q = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in T_q(Q_0^5)$. Dann existiert ein C^∞ -Vektorfeld $\hat{s}$ auf Q_0^5 mit den folgenden Eigenschaften:

- 1) $\hat{s}(q) = X_q$,
- 2) $\text{sign } h_q(\hat{s}(q), \hat{s}(q)) = \text{sign } h_q(X_q, X_q)$ für alle $q \in Q_0^5$,
- 3) $\hat{s}$ ist ein A-invariantes Vektorfeld.

Die Metrik h_q war vorher in (98) definiert worden. Den Beweis von Theorem II bringen wir in Anhang B. Es ist klar, daß Theorem II genauso auch für die Mannigfaltigkeit Q_0^5/A gilt, da man dann ja nur die Äquivalenzklassen wie in (102) zu betrachten hat.

Damit sind wir nun in der Lage, lokal zu definieren, wann zwei Ereignisse in der Mannigfaltigkeit M_C^4 bzw. Q_0^5/A raum-, zeit- oder lichtartig zueinander sind, bzw. wann ein Ereignis vor dem andern kommt. Seien also zwei Ereignisse E_0 und E_1 gegeben. Da wir uns hier auf lokale Ereignisse beschränken, können wir o.B.d.A. annehmen, daß sie in der Karte U_κ liegen, d.h. also, sie können durch die Koordinaten $\mathfrak{X}(E_0)$ und $x(E_1)$ beschrieben werden. Durch die schon im 1. Kapitel betrachteten Abbildungen $\zeta, \varepsilon, \omega$ wird dem Punkt E_1 eindeutig ein Tangentialvektor $X_q := S^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} = (x^j(E_1) - \mathfrak{X}^j(E_0)) \frac{\partial}{\partial x^j}$ aus $T_q(Q_0^5/A)$ zugeordnet. Die Relation (102) zeigt uns, daß der Tangentialvektor X_q in den globalen Koordinaten γ^μ ausgedrückt gerade die Äquivalenzklasse aller Tangentialvektoren $s^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ist, wo die $s^\mu(q^0)$ einfach

durch Umkehrung der Abbildung aus der Gleichung (103) gewonnen werden. Wir sagen nun

$$\begin{aligned} E_1 \text{ liegt raumartig zu } E_0 & \quad \times \quad \text{sign } s^\mu(q^0) s_\mu(q^0) < 0, \quad (105) \\ E_1 \text{ liegt zeitartig zu } E_0 & \quad \times \quad \text{sign } s^\mu(q^0) s_\mu(q^0) > 0, \\ E_1 \text{ liegt lichtartig zu } E_0 & \quad \times \quad \text{sign } s^\mu(q^0) s_\mu(q^0) = 0. \end{aligned}$$

Dabei ist $s^\mu(q^0) \partial_\mu$ irgendein Repräsentant der Äquivalenzklasse der Tangentialvektoren aus V , die bei Projektion am Punkt q^0 in den Tangentialvektor $S^j(x) \partial_j$ abgebildet werden. Es ist leicht einzusehen, daß obige Definitionen (105) nicht von der Auswahl des Repräsentanten $s^\mu(q^0) \partial_\mu$ abhängen. Sei nämlich $\tilde{s}^\mu(q^0) \partial_\mu$ ein anderer Repräsentant, dann gilt auf Grund der Definition der Äquivalenzklassen in (102) $\tilde{s}^\mu = s^\mu + \xi \eta^\mu$. Wegen der Eigenschaft $s^\mu \eta_\mu = 0$ und $\eta^\mu \eta_\mu = 0$ folgt aber sofort

$$\text{sign } \tilde{s}^\mu \tilde{s}_\mu = \text{sign } s^\mu s_\mu.$$

Da $s^\mu(q^0) s_\mu(q^0)$ unter der vollen 15-parametrischen Konformen Gruppe invariant ist, ist auch die Definition (105) konforminvariant. Wir erwähnen hier nur noch, daß es global nicht möglich ist, konforminvariante Definitionen von Raum- und Zeitartigkeit zu geben, nur die Lichtartigkeit von zwei Ereignissen kann global definiert werden. Global konforminvariante Ausdrucksweisen sind damit nur Lichtartigkeit und Nicht-Lichtartigkeit von zwei Ereignissen. Einzelheiten der globalen Betrachtungen findet man in der Arbeit von Go²⁷⁾.

Auf Grund des Theorems II gibt es zu dem oben konstruierten Tangentialvektor $X = s^\mu(q^0) \partial_\mu$ ein auf ganz Q^5/A definiertes A -invariantes C^∞ Vektorfeld $\hat{s} = \hat{s}^\mu(q) \partial_\mu$ mit $\hat{s}^\mu(q^0) = s^\mu(q^0)$ und $\hat{s}^\mu(\alpha q^0) = \alpha \hat{s}^\mu(q^0)$. Theorem I erlaubt uns nun lokal eine konforminvariante Zeitordnung $\mathcal{E}(E_1, E_0)$ zwischen den beiden Ereignissen E_0 und E_1 zu definieren:

$$\mathcal{E}(E_1, E_0) = \mathcal{E}(x, \bar{x}) := \text{sign} \left[\eta^0 \hat{s}^5(q^0) - \eta^5 \hat{s}^0(q^0) \right],$$

falls nur die beiden Ereignisse E_0 und E_1 zeitartig oder lichtartig zu einander liegen. Für lichtartige Ereignisse kann man wiederum global eine Zeitordnung einführen²⁷⁾. Damit hat man

in der von uns eingeführten Raum-Zeit Mannigfaltigkeit M_C^4 lokal dieselbe kausale Struktur vorliegen wie in einer Poincare-invarianten Welt, global jedoch hat man diese Struktur nur für lichtartige Ereignisse.

7. Die Klein-Gordon Gleichung auf der Mannigfaltigkeit M_C^4

Wir wollen in diesem Kapitel das folgende Problem betrachten: bisher war man gewohnt, alle physikalischen Ereignisse im pseudoeuklidischen Raum $\mathbb{R}_1^4$ zu beschreiben, so hat man dort die verschiedenen Lorentz-invarianten Gleichungen wie die Klein-Gordon Gleichung für spinlose Teilchen, die Dirac Gleichung für Spin-1/2-Teilchen, die Maxwell Gleichungen für Spin-1-Teilchen usw. Wir fragen nun, ob diese Gleichungen in bestimmter Weise auf die gesamte Mannigfaltigkeit Q_0^5/A fortgesetzt werden können, wenn man davon ausgeht, daß ja der pseudoeuklidische Raum $\mathbb{R}_1^4$ mittels des Homeomorphismus φ_{κ}^{-1} , wie er in (86) definiert worden war, in die Mannigfaltigkeit Q_0^5/A eingebettet werden kann. Um diese Fragen klären zu können, müssen wir zunächst einige allgemeine Definitionen bringen, die man in Standardlehrbüchern über differenzierbare Mannigfaltigkeiten finden kann ³⁴⁾.

Def. 1. Es sei M eine beliebige differenzierbare C^∞ -Mannigfaltigkeit mit dem vollständigen Atlas $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$. Eine Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{T}$ gehört zur Klasse $C^k(M) \times f_i := f \circ \varphi_i: \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{T}$ ist für alle Karten $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ein Element der Klasse $C^k(\varphi_i(U_i))$.

Def. 2. Sei M eine differenzierbare C^∞ -Mannigfaltigkeit mit dem vollständigen Atlas $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$. Ein System S von Karten $(U_1, \varphi_1)_{1 \in I', I' \subset I}$ heißt eine Basis des Atlas $\mathcal{A}$, wenn gilt $\bigcup_{1 \in I'} U_1 = M$.

Definition 1 kann dann dahingehend abgeschwächt werden, daß die Funktion $f \in C^k(M) \times f_1 \in C^k(\varphi_1(U_1))$ für eine Basis $(U_1, \varphi_1)_{1 \in I'}$ des Atlas gilt.

Für die Funktionen f_i aus Def. 1. folgt sofort die folgende Relation

$$f_i = f_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_i^{-1} \quad \text{auf } \varphi_i(U_i \cap U_1) \quad (106)$$

für alle Karten (U_1, φ_1) und (U_i, φ_i) des Atlas $\mathcal{A}$.

Umgekehrt gilt nun auch der folgende Satz 34)

Satz 1. Es sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ sei eine Basis des Atlas $\mathcal{A}$. Ferner gebe es zu jeder Karte (U_i, φ_i) eine Funktion $f_i: \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{E}$, die der Eigenschaft (106) genügen. Dann existiert genau eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{E}$ mit $f \circ \varphi_i^{-1} = f_i$ auf $\varphi_i(U_i)$. Ferner ist $f \in C^k(M)$ genau dann, wenn $f_i \in C^k(\varphi_i(U_i))$ für alle $i \in I$ gilt.

Wir können jetzt präzise sagen, was wir unter der Fortsetzung einer Funktion $f_\kappa: \mathbb{R}_1^{4(\kappa)} \rightarrow \mathbb{R}$ auf die gesamte Mannigfaltigkeit Q_0^5/A verstehen wollen.

Def. 3. Die Funktion $f: Q_0^5/A \rightarrow \mathbb{E}$ heißt Fortsetzung der Funktion $f_\kappa: \varphi_\kappa(U) \rightarrow \mathbb{E}$, wenn $f \circ \varphi_\kappa^{-1} = f_\kappa$ auf $\varphi_\kappa(U_\kappa)$ gilt.

Interessant für die Anwendung sind natürlich nur stetige oder differenzierbare Fortsetzungen. Es ergibt sich dann also die Frage, wann sich eine auf $\mathbb{R}_1^4$ vorgegebene C^k -Funktion $f_\kappa(x)$ zu einer auf Q_0^5/A definierten C^k -Funktion fortsetzen läßt. Eng damit verbunden ist natürlich die Frage der Fortsetzbarkeit von Differentialoperatoren auf $\mathbb{R}_1^4$ zu Differentialoperatoren auf der Mannigfaltigkeit Q_0^5/A , z.B. des Klein-Gordon Operators $\partial^j \partial_j$ oder anderer Operatoren der Physik. Zur Behandlung gerade dieses letzt erwähnten Problems müssen wir noch definieren, was wir überhaupt unter einem Differentialoperator auf einer Mannigfaltigkeit verstehen wollen.

Def. 4. Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Ein C^∞ -Differentialoperator P ist eine lineare Abbildung von $C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$, $P: C^\infty(\Omega) \ni f \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a^\alpha D^\alpha f \in C^\infty(\Omega)$, wobei die a^α lokal endliche Funktionen auf $C^\infty(\Omega)$ sind, d.h. nur endlich viele a^α sind von Null verschieden auf jeder kompakten Teilmenge von Ω . Ferner benutzen wir die Abkürzung

$$D^\alpha := \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{mit } \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e_i.$$

Def. 5. Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit mit der Basis $(U_l, \varphi_l)_{l \in I}$ des Atlas $\mathcal{A}$. Eine lineare Abbildung $P: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ heißt ein C^∞ -Differentialoperator auf der Mannigfaltigkeit M , falls

es zu jeder Karte (U_1, φ_1) der Basis von $\mathcal{A}$ Differentialoperatoren P_1 der Def.4. auf $\varphi_1(U_1)$ gibt mit

$$(P f) \circ \varphi_1^{-1} = P_1 (f \circ \varphi_1^{-1}) = P_1 f_1$$

auf $\varphi_1(U_1)$ für alle $f \in C^\infty(M)$.

Für die Differentialoperatoren P_1 leitet man aus der Def.5. leicht folgende Bedingung ab:

$$P_1 f_1 = [P_1 (f_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1})] \circ \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1} \quad \text{auf } \varphi_1(U_1 \cap U_1). \quad (107)$$

Hier wollen wir nun ebenfalls definieren, wann ein Differentialoperator P_κ auf die Mannigfaltigkeit Q_0^5 fortsetzbar heißt.

Def.6. Ein Differentialoperator P_κ auf $\varphi_\kappa(U_\kappa)$ heißt fortsetzbar auf die Mannigfaltigkeit Q_0^5/A , wenn es einen Differentialoperator P auf Q_0^5/A gibt, so daß für alle Funktionen $f \in C^\infty(Q_0^5/A)$ auf $\varphi_\kappa(U_\kappa)$ gilt: $(Pf) \circ \varphi_\kappa^{-1} = P_\kappa f_\kappa$.

7.1. Die Fortsetzbarkeit von Funktionen im $\mathbb{R}_1^4$ auf die Mannigfaltigkeit Q_0^5/A

Es sei also eine stetige Funktion f_κ auf $\mathbb{R}_1^{4(\kappa)} = \varphi_\kappa(U_\kappa)$ vorgegeben, φ_κ und U_κ seien so definiert wie in (86) und (85). Um zu prüfen, ob f_κ zu einer auf ganz Q_0^5/A stetigen Funktion f fortgesetzt werden kann, genügt es nach Satz 1 nachzuschauen, ob es in den Räumen $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ $\alpha = \lambda, \tilde{\kappa}, \tilde{\lambda}$ stetige Funktionen f_α gibt, die die Relation (106) erfüllen. Auf Grund dieser Relation muß also insbesondere gelten

$$f_\alpha = f_\kappa \circ \varphi_\kappa \circ \varphi_\alpha^{-1} \quad \text{auf } \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\kappa), \quad (108)$$

d.h. auf der Teilmenge $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\kappa) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$ ist in natürlicher Weise die Funktion f_α durch die vorgegebene Funktion f_κ ausdrückbar. Auf Grund der Eigenschaften der zusammengesetzten Abbildungen $\varphi_\kappa \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ist demnach die durch (108) definierte Funktion f_α auf $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\kappa)$ stetig. Die Frage ist nun, ob die Funktion f_α aus (108) zu einer auf ganz $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ definierten und dort auch stetigen Funktion fortgesetzt werden kann. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt sicher dann, wenn die Mengen

$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\kappa)$ dicht in $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ liegen. In unserem Fall der Mannigfaltigkeit Q_0^5/A und der in (86) und (85) definierten Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in Z$, gilt aber sogar

- 1) U_α liegt dicht in Q_0^5/A für alle $\alpha \in Z$,
 - 2) $U_\kappa \cap U_\lambda \cap U_{\tilde{\lambda}} \cap U_{\tilde{\kappa}}$ liegt dicht in Q_0^5/A und
 - 3) $\varphi_\alpha(U_\kappa \cap U_\lambda \cap U_{\tilde{\kappa}} \cap U_{\tilde{\lambda}})$ liegt dicht in $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ für alle $\alpha \in Z$.
- (109)

Damit folgt aber in unserem Fall der Mannigfaltigkeit Q_0^5/A aus der Existenz der stetigen Fortsetzung einer Funktion aus $C^0(\mathbb{R}_1^4)$ sofort auch ihre Eindeutigkeit. Man kann sich auch leicht davon überzeugen, daß auf Grund der Aussagen (109) die Gültigkeit der Relationen (106) automatisch folgt, wenn nur die Funktionen f_α aus (108) auf ganz $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ stetig fortgesetzt werden können. Setzt man schließlich die explizite Gestalt der zusammengesetzten Funktionen $\varphi_\kappa \circ \varphi_\alpha^{-1}$, die wir im Anhang D angeben, in die Definitionen der Funktionen f_α in (108) ein, so erhalten wir den folgenden Satz

Satz 2. Eine stetige Funktion $f_\kappa : \mathbb{R}_1^{4(\kappa)} \longrightarrow \mathbb{E}$ ist genau dann eindeutig zu einer auf ganz Q_0^5 definierten und dort stetigen Funktion f fortsetzbar, wenn

- (1) die Funktion $f_\lambda(y) := f_\kappa(y / y^j y_j)$ für alle $y \in \mathbb{R}_1^{4(\lambda)}$,
- (2) die Funktion $f_{\tilde{\kappa}}(z) := f_\kappa(1/2 \frac{zz-1}{z^j - z^j}, 1/2 \frac{zz+1}{z^j - z^j}, \frac{z^2}{z^j - z^j}, \frac{z^3}{z^j - z^j})$
für alle $z \in \mathbb{R}_1^{4(\tilde{\kappa})}$,
- (3) die Funktion $f_{\tilde{\lambda}}(w) := f_\kappa(1/2 \frac{1-ww}{w^j - w^j}, 1/2 \frac{1+ww}{w^j - w^j}, \frac{w^2}{w^j - w^j}, \frac{w^3}{w^j - w^j})$
für alle $w \in \mathbb{R}_1^{4(\tilde{\lambda})}$

stetige Funktionen sind.

Der Beweis des Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem oben Gesagten. Es ist klar, daß dieselben Bedingungen in der entsprechenden Form auch das Problem der differenzierbaren Fortsetzung beschreiben. Im Anhang C werden wir übrigens zeigen, daß die drei Bedingungen (1), (2) und (3) des Satzes 2. von einander unabhängig sind, d.h. eine oder zwei der Bedingungen genügen im allgemeinen nicht zur Fortsetzbarkeit einer Funktion f_κ in $\varphi_\kappa(U_\kappa)$.

Wir wollen nun noch ein nicht triviales Beispiel von Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}_1^{4(\kappa)})$ angeben, die auf die gesamte Mannigfaltigkeit Q_0^5/A fortgesetzt werden können. Dazu betrachten wir die Eigenfunktionen des Operators I_r im Impulsraum ³⁵⁾ und transformieren sie in den Ortsraum $\mathbb{R}_1^{4(\kappa)}$ mittels Fouriertransformation. Dabei erhält man die folgende Klasse von Funktionen ³⁶⁾:

$$f_{nlm}^{(\kappa)}(x) = A_{nl} Y_{lm}(\hat{x}) r^l g_{nl}(x), \quad r = |\vec{x}|, \quad (110)$$

$$\text{mit } A_{nl} = \pi^{-1/2} (-i)^l 2^{2l+1} l! [n!(2l+1+n)!]^{-1/2}$$

$$\text{und } g_{nl}(x) = \partial_z^n \left\{ [z(1+ix^0)+1-ix^0]^2 + (z-1)^2 r^2 \right\}^{-l-1} \Big|_{z=0}.$$

Diese Funktionen lassen sich in der oben beschriebenen Weise auf ganz Q_0^5/A fortsetzen und man erhält dabei die folgenden Funktionen $f_{nlm}([\gamma]) \in C^\infty(Q_0^5/A)$

$$f_{nlm}([\gamma]) = A_{nl} |\vec{\eta}|^l Y_{lm}(\hat{\eta}) \tilde{g}_{nl}(\eta) \quad (111)$$

wobei die $\tilde{g}_{nl}(\eta)$ durch die folgende Rekursionsformel berechnet werden können

$$\tilde{g}_{nl}(\eta) = -2(1+l)(\kappa+l) \tilde{g}_{n-1,l+1}(\eta) + 2(1+l)(1-n)(\kappa+2i\eta^0 - \lambda) \tilde{g}_{n-2,l+1}(\eta)$$

mit

$$\tilde{g}_{0,l}(\eta) = \kappa(\kappa-2i\eta^0 - \lambda)^{-(l+1)},$$

$$\text{und } \tilde{g}_{1,l}(\eta) = -2(1+l)\kappa(\kappa+l)(\kappa-2i\eta^0 - \lambda)^{-(l+2)}.$$

Eine dem Ausdruck (110) analoge Formel für $\tilde{g}_{nl}(\eta)$ ist

$$\tilde{g}_{nl}(\eta) = \kappa \partial_z^n \left[-(z-1)^2 \lambda + z^2 (2i\eta^0 + \kappa) + \kappa - 2i\eta^0 + 2\kappa z \right]^{-(l+1)} \Big|_{z=0}.$$

7.2. Die Fortsetzbarkeit des Operators $\frac{\partial}{\partial x^i}$ auf den Raum Q_0^5/A

Wir haben schon im Abschnitt 6.2. mit Differentialoperatoren auf der Mannigfaltigkeit Q_0^5/A Bekanntschaft gemacht; nämlich in Form der A-invarianten C^∞ -Vektorfelder, $s^\mu(\eta) \partial_\mu$ auf der Mannigfaltigkeit Q_0^5 , die zu Vektorfeldern auf Q_0^5/A werden, wenn man die zu (102) analoge Äquivalenzrelation

$$s^\mu(\eta) \partial_\mu \approx \tilde{s}^\mu(\eta) \partial_\mu \quad \nabla \quad s^\mu(\eta) - \tilde{s}^\mu(\eta) = \epsilon \eta^\mu$$

eingeführt, d.h. die Vektorfelder modulo $\gamma^\mu \partial_\mu$ in Klassen einteilt, da ja das Vektorfeld $\gamma^\mu \partial_\mu$ auf Q_0^5/A wie das Nullvektorfeld wirkt. Diese Vektorfelder induzieren ja gerade mittels der Abbildung $\tilde{\pi}_*$ in den Mengen $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ lokale Vektorfelder, die aber nach unserer Definition 4. Differentialoperatoren sind. Für die lokalen Differentialoperatoren $P_\kappa, P_\lambda, P_{\tilde{\kappa}}$ und $P_{\tilde{\lambda}}$ erhält man dann, wenn wir uns begnügen den Ausdruck für P_κ hinzuschreiben:

$$P_\kappa = S^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{mit} \quad S^j(x) = \frac{S^j(\gamma)}{\kappa} - x^j \frac{S^{(\kappa)}(\gamma)}{\kappa} \quad (113)$$

Für die übrigen P_α erhält man vollkommen analoge Relationen. Sei nun andererseits ein Vektorfeld $S^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$ in $\mathbb{R}_1^{4(\kappa)} = \varphi_\kappa(U_\kappa)$ vorgegeben. Umkehrung der Relation (113) liefert dann zusammen mit (97) ein Vektorfeld, das zunächst nur auf $U_\kappa \subset Q_0^5/A$ definiert ist, nämlich

$$S^\mu(\gamma) \partial_\mu = \kappa S^j\left(\frac{\gamma}{\kappa}\right) \frac{\partial}{\partial \gamma^j} + 2 \gamma^j S_j\left(\frac{\gamma}{\kappa}\right) \frac{\partial}{\partial \lambda}. \quad (114)$$

Damit aber gilt der folgende Satz:

Satz 3. Der Differentialoperator $S^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$ kann genau dann zu einem Differentialoperator auf der Mannigfaltigkeit Q_0^5/A fortgesetzt werden, wenn die Funktionen $S^j(x)$ auf ganz Q_0^5/A fortgesetzt werden können, d.h. wenn die Funktionen $\tilde{S}^j(\gamma) := S^j\left(\frac{\gamma}{\kappa}\right)$ auf ganz Q_0^5/A definiert werden können und auch noch differenzierbar sind.

Als Spezialfall erhält man aus dem Satz 3. z.B., daß der Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial x^j}$ auf ganz Q_0^5/A fortgesetzt werden kann, und zwar ist der fortgesetzte Operator gerade

$$P^{(j)} = \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \gamma^j} + 2 \gamma^j \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \quad \text{modulo} \quad \gamma^\mu \partial_\mu \quad (115)$$

Die lokalen Differentialoperatoren P_α , die zu diesem Operator gehören, sind die folgenden

$$\begin{aligned} P_\kappa^{(j)} &= \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{für } j = 0, 1, 2, 3, \\ P_\lambda^{(j)} &= y^k y_\kappa \frac{\partial}{\partial y^j} - 2 y_j \left(y^k \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \quad \text{für } j = 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (116)$$

$$P_{\tilde{\kappa}}^{(0)} = \left\{ 1/2(1-zz) - z^0(z^1 - z^0) \right\} \frac{\partial}{\partial z^0} + \left\{ 1/2(1-zz) - z^1(z^1 - z^0) \right\} \frac{\partial}{\partial z^1} - \\ - z^2(z^1 - z^0) \frac{\partial}{\partial z^2} - z^3(z^1 - z^0) \frac{\partial}{\partial z^3}$$

$$P_{\tilde{\kappa}}^{(1)} = \left\{ 1/2(1+zz) + z^0(z^1 - z^0) \right\} \frac{\partial}{\partial z^0} + \left\{ 1/2(1+zz) + z^1(z^1 - z^0) \right\} \frac{\partial}{\partial z^1} + \\ + z^2(z^1 - z^0) \frac{\partial}{\partial z^2} + z^3(z^1 - z^0) \frac{\partial}{\partial z^3}$$

$$P_{\tilde{\kappa}}^{(2)} = -z^3 \frac{\partial}{\partial z^0} - z^3 \frac{\partial}{\partial z^1} + (z^1 - z^0) \frac{\partial}{\partial z^3}$$

$$P_{\tilde{\kappa}}^{(3)} = -z^2 \frac{\partial}{\partial z^0} - z^2 \frac{\partial}{\partial z^1} + (z^1 - z^0) \frac{\partial}{\partial z^2}$$

$$P_{\tilde{\chi}}^{(0)} = \left\{ 1/2(1-ww) - w^0(w^1 - w^0) \right\} \frac{\partial}{\partial w^0} + \left\{ 1/2(1-ww) - w^1(w^1 - w^0) \right\} \frac{\partial}{\partial w^1} - \\ - w^2(w^1 - w^0) \frac{\partial}{\partial w^2} - w^3(w^1 - w^0) \frac{\partial}{\partial w^3}$$

$$P_{\tilde{\chi}}^{(1)} = \left\{ -1/2(1+ww) - w^0(w^1 - w^0) \right\} \frac{\partial}{\partial w^0} + \left\{ -1/2(1+ww) - w^1(w^1 - w^0) \right\} \frac{\partial}{\partial w^1} - \\ - w^2(w^1 - w^0) \frac{\partial}{\partial w^2} - w^3(w^1 - w^0) \frac{\partial}{\partial w^3}$$

$$P_{\tilde{\chi}}^{(2)} = -w^3 \frac{\partial}{\partial w^0} - w^3 \frac{\partial}{\partial w^1} + (w^1 - w^0) \frac{\partial}{\partial w^3}$$

$$P_{\tilde{\chi}}^{(3)} = -w^2 \frac{\partial}{\partial w^0} - w^2 \frac{\partial}{\partial w^1} + (w^1 - w^0) \frac{\partial}{\partial w^2}$$

7.3. Der Klein-Gordon Operator auf Q_0^5/A

Nachdem wir in 7.2. gezeigt haben, daß man den Operator $\frac{\partial}{\partial x^j}$ auf die gesamte Mannigfaltigkeit Q_0^5/A fortsetzen kann, ist es nun leicht, auch den Klein-Gordon Operator $\partial^j \partial_j$ fortzusetzen. Die lokalen Operatoren $P_{\infty}^{\square}$ erhält man einfach durch Summation von $P_{\infty}^{(j)} P_{\alpha(j)}$. Einsetzen der Ausdrücke (116) ergibt dabei

$$P_{\kappa}^{\square} = \square_x = \partial^j \partial_j$$

$$P_{\lambda}^{\square} = (y \cdot y)^2 \square_y - 4 y \cdot y (y^k \frac{\partial}{\partial y^k})$$

$$P_{\tilde{\kappa}}^{\square} = (z^1 - z^0)^2 \square_z + 2 (z^1 - z^0) \left(\frac{\partial}{\partial z^1} + \frac{\partial}{\partial z^0} \right)$$

$$P_{\tilde{\lambda}}^{\square} = (w^1 - w^0)^2 \square_w + 2 (w^1 - w^0) \left(\frac{\partial}{\partial w^1} + \frac{\partial}{\partial w^0} \right).$$

Diese vier Operatoren $P_{\alpha}^{\square}$ definieren schon eindeutig einen Differentialoperator $P^{\square}$ in der Mannigfaltigkeit Q_0^5 . Diesen erhält man ausgedrückt in den Koordinaten γ einfach durch Quadrieren von $P^{(j)} P_{(j)}$ aus der Relation (115), also

$$P^{\square} = \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \gamma^j} + 2 \gamma_j \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \gamma^j} + 2 \gamma^j \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) =$$

$$\kappa^2 \square_6 + 4 \kappa \partial_{\lambda} (\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + 1), \quad \text{mit } \square_6 = \partial^{\mu} \partial_{\mu}.$$

Berücksichtigen wir noch, daß wir ja modulo $\gamma^{\mu} \partial_{\mu}$ zu rechnen haben, so erhalten wir schließlich als Klein-Gordon Operator auf der Mannigfaltigkeit Q_0^5/A

$$P^{\square} = \kappa^2 \square_6 + 4 \kappa \partial_{\lambda}. \quad (117)$$

An die Stelle der Klein-Gordon Gleichung zur Masse $m=0$ im Raum $\mathbb{R}_1^{4(\kappa)}$ tritt nun eine Klein-Gordon Gleichung auf der Mannigfaltigkeit Q_0^5/A

$$P^{\square} f([\gamma]) = 0. \quad (118)$$

Es ist klar auf Grund der Konstruktion des Operators $P^{\square}$ und der Operatoren $P_{\alpha}^{\square}$, daß $f([\gamma])$ genau dann eine Lösung von (118) ist, wenn die Funktionen f_{α} in Def. 1. Lösungen der Gleichung $P_{\alpha}^{\square} f_{\alpha} = 0$ für alle Karten $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ sind. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn eine Lösung f_{κ} von $P_{\kappa}^{\square} f_{\kappa} = \square_x f_{\kappa} = 0$ auf die ganze Mannigfaltigkeit Q_0^5/A fortsetzbar ist. Solche Funktionen haben wir z.B. in den $f_{nlm}^{(\kappa)}(x)$ aus der Relation (110) gefunden. Man kann auch explizit im γ Raum nachrechnen, daß die fortgesetzten Funktionen $f_{nlm}([\gamma])$ in (111) Lösungen der Gleichung

$$P^{\square} f_{nlm}([\gamma]) \equiv (\kappa^2 \square_6 + 4 \kappa \partial_{\lambda}) f_{nlm}([\gamma]) = 0$$

sind. Die Frage der Lösung des Anfangwertproblems obiger Differentialgleichung soll hier nicht näher untersucht werden.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H.A. Kastrup, auf dessen Anregung diese Arbeit angefertigt wurde, für viele anregende und hilfreiche Diskussionen herzlich danken. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. F. Bopp für die Möglichkeit, die Arbeit an seinem Institut durchführen zu können. Besonders verbunden bin ich meinem Kollegen Herrn Dipl. Phys. T.H. Go für die nette Zusammenarbeit in den letzten beiden Jahren, von der ich so viel für diese Arbeit profitierte, sowie allen Kollegen der Arbeitsgruppe Kastrup für die großartige Arbeitsatmosphäre, die jederzeit bei uns geherrscht hat. Für die finanzielle Unterstützung während der Anfertigung dieser Arbeit sorgte die Deutsche Forschungsgemeinschaft und das Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft.

Anhang A

In diesem Anhang sollen einige mathematische Begriffe kurz zusammengestellt werden, von denen im Laufe der Arbeit dauernd Gebrauch gemacht wird (29)32)34)37).

Def.A1. Es seien M und N topologische Räume. Eine Abbildung $\varphi: M \rightarrow N$ heißt ein Homeomorphismus von M auf N , wenn

1) φ bijektiv ist

2) φ und φ^{-1} sind stetige Abbildungen.

Man nennt dann M und N homeomorph, in Zeichen $M \sim N$.

Def.A2. Gegeben sei ein topologischer Raum M . Zu jedem Punkt $q \in M$ existiere eine offene Umgebung U und ein Homeomorphismus $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Das Paar (U, φ) nennen wir eine Karte. M heißt eine n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit (oder n -dim. differenzierbare Mannigfaltigkeit von der Klasse C^∞), wenn die Familie $\mathcal{A}$ der Karten (U, φ) die folgenden Relationen erfüllt:

1) seien (U, φ) und $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, dann ist die Abbildung

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

aus der Klasse $C^\infty(\psi(U \cap V))$, d.h. ist als Abbildung offener Mengen des $\mathbb{R}^n$ unendlich oft stetig partiell differenzierbar;

2) es gilt $\bigcup_{U \in \mathcal{A}} U = M$

3) falls $\chi: W \rightarrow \chi(W) \subset \mathbb{R}^n$ irgendein Homeomorphismus einer offenen Menge W aus M auf eine offene Menge $\chi(W)$ in $\mathbb{R}^n$ ist und falls für alle Karten $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ gilt

$$\varphi \circ \chi^{-1} : \chi(W \cap U) \rightarrow \varphi(W \cap U)$$

$$\text{bzw. } \chi \circ \varphi^{-1} : \varphi(W \cap U) \rightarrow \chi(W \cap U)$$

sind unendlich oft stetig partiell differenzierbare Abbildungen, dann folgt $(W, \chi) \in \mathcal{A}$.

Man nennt die Familie $\mathcal{A} = \{ (U, \varphi) \}$ einen vollständigen Atlas der Mannigfaltigkeit M . Die Abbildung φ heißt auch lokales Koordinatensystem auf der offenen Menge U der Mannigfaltigkeit M .

Def.A3. Sei $\mathcal{A}$ ein vollständiger Atlas einer n -dim. C^∞ -Mannigfaltigkeit M . Eine Teilmenge $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ heißt Basis des Atlas $\mathcal{A}$, wenn gilt

$$\bigcup_{U \in \mathcal{A}'} U = M.$$

Ein wichtiger Begriff in der Arbeit ist der Tangentialvektor in einem Punkt q einer Mannigfaltigkeit M .

Def.A4. Sei M eine n -dim. C^∞ -Mannigfaltigkeit, W sei eine offene Umgebung des Punktes $q \in M$, ferner sei $C^\infty(W) = \{f: W \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \rightarrow \mathbb{R} \text{ unendlich oft differenzierbar f\"ur alle Karten } (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$. Eine Abbildung $X_q : C^\infty(W) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein Tangentialvektor im Punkt q der Mannigfaltigkeit M , wenn

- a) X_q ist lineare Abbildung
- b) $X_q(fg) = X_q(f)g(q) + f(q)X_q(g)$ für alle $f, g \in C^\infty(W)$.

Die Menge aller Tangentialvektoren in einem Punkt $q \in M$ bildet den Tangentialvektorraum $T_q(M)$. Sei (U, φ) lokales Koordinatensystem in $q \in M$. Ferner gelte $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ für alle $p \in U$. Dann bilden die Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ eine Basis von $T_q(M)$, d.h. jedes Element $X_q \in T_q(M)$ kann

$$\text{als } X_q = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ dargestellt werden.}$$

Bildet man die Vereinigungsmenge $T(M) := \bigcup_{p \in M} T_p(M)$ aller Tangentialvektorrume von M , so erhält man in natürlicher Weise eine $2n$ -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit, die das Tangentialbündel von M genannt wird. Es bezeichne $\pi : T(M) \rightarrow M$ die folgende Abb.

$$\pi : X_p \mapsto p.$$

Man kann zeigen, daß dann diese Abbildung π eine C^∞ Abbildung von $T(M)$ in M ist.

Def.A5. Eine Abbildung $X : M \rightarrow T(M)$ heißt ein C^∞ Vektorfeld, wenn

- a) X eine C^∞ Abbildung ist
- b) $\pi \circ X = \text{id}_M$.

Man nennt eine solche Abbildung X auch einen C^∞ Schnitt des Tangentialraumbndels von M . Lokal kann man X folgendermaßen beschreiben:

$$X = \sum_{i=1}^n a^i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

wobei die $a^i(x^1, \dots, x^n)$ unendlich oft stetig partiell differenzierbare Funktionen in den Variablen x^i sind.

Ein Begriff soll nun noch erwähnt werden, den wir noch gebrauchen werden, nämlich die Parallelisierbarkeit von Mannigfaltigkeiten.

Def. A6. Eine n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit M heißt parallelisierbar, wenn es n C^∞ -Vektorfelder auf M gibt, die in jedem Punkt p von M eine Basis von $T_p(M)$ bilden.

Anhang B

In Kapitel 5 haben wir gesehen, daß die Mannigfaltigkeit Q_0^5 homeomorph zu $S_1 \times S_3 \times \mathbb{R}$ ist. Nun weiß man ³⁸⁾, daß von allen n -Sphären S_n genau die S_1, S_3 und die S_7 parallelisierbar sind. Daher ist auch die Mannigfaltigkeit Q_0^5 parallelisierbar. Betrachten wir die folgenden fünf Vektorfelder

$$\hat{s}_i = \hat{s}_i^\mu(q) \frac{\partial}{\partial \gamma^\mu} \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (B1)$$

mit

$$(\hat{s}_1^\mu(q)) = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \gamma^5)$$

$$(\hat{s}_2^\mu(q)) = (-\gamma^5, 0, 0, 0, 0, \gamma^0)$$

$$(\hat{s}_3^\mu(q)) = (0, -\gamma^2, \gamma^1, \gamma^4, -\gamma^3, 0)$$

$$(\hat{s}_4^\mu(q)) = (0, -\gamma^3, -\gamma^4, \gamma^1, \gamma^2, 0)$$

$$(\hat{s}_5^\mu(q)) = (0, -\gamma^4, \gamma^3, -\gamma^2, \gamma^1, 0)$$

mit $q = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \gamma^5) \in Q_0^5$.

Dann gilt aber

- a) $\gamma^\mu \hat{s}_{i\mu}(q) = 0$ für alle $i=1, \dots, 5$,
- b) $h_q(\hat{s}_i(q), \hat{s}_j(q)) = 0$ für $i \neq j$, (h_q definiert in (98)) (B2)
- c) $h_q(\hat{s}_i(q), \hat{s}_i(q)) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 1 \\ (\gamma^0)^2 + (\gamma^5)^2 & \text{falls } i = 2 \\ -\{(\gamma^0)^2 + (\gamma^5)^2\} & \text{falls } i = 3, 4, 5 \end{cases}$

Damit sind die $\hat{s}_i$ ($i=1, 2, \dots, 5$) fünf in jedem Punkt von Q_0^5 linear unabhängige C^∞ Vektorfelder. Somit können wir folgendes Theorem beweisen

Theorem II. Sei $X_q = a^\mu \frac{\partial}{\partial \gamma^\mu}$ ein Element aus $T_q(Q_0^5)$. Dann gibt es ein C^∞ Vektorfeld $\hat{s}$ auf Q_0^5 mit den Eigenschaften

- 1) $\hat{s}(q) = X_q$,
- 2) $\text{sign } h_q(\hat{s}(q), \hat{s}(q)) = \text{sign } h_q(X_q, X_q)$ für alle $q \in Q_0^5$,
- 3) $\hat{s}$ ist ein A-invariantes Vektorfeld.

Beweis: Da die Vektorfelder $\hat{s}_i$ in (B1) in jedem Punkt $q \in Q_0^5$

eine Basis von $T_q(Q_0^5)$ bilden, existieren Konstanten b_i ($i=1, \dots, 5$) mit

$$Xq = a^\mu \partial_\mu = \sum_{i=1}^5 b_i \hat{s}_i(q) . \quad (B3)$$

Sei nun

$$\hat{s} = \sum_{i=1}^5 b_i \hat{s}_i . \quad (B4)$$

Damit gilt aber auf Grund von (B4) $\hat{s}(q) = Xq$. Die Eigenschaften (B2) zusammen mit (B4) ergeben

$$h_q(\hat{s}(q), \hat{s}(q)) = (\eta^0)^2 + (\eta^5)^2 (b_2^2 - b_3^2 - b_4^2 - b_5^2) .$$

Daraus folgt aber $\text{sign } h_q(\hat{s}(q), \hat{s}(q)) = \text{sign}(b_2^2 - b_3^2 - \dots - b_5^2)$.

Die Relation (B3) aber zeigt

$$\text{sign}(b_2^2 - b_3^2 - \dots - b_5^2) = \text{sign } hq(Xq, Xq)$$

und damit auch

$$\text{sign } h_q(\hat{s}(q), \hat{s}(q)) = \text{sign } hq(Xq, Xq)$$

für alle $q \in Q_0^5$.

Die Eigenschaft 3) folgt sofort aus der Definition (B4) sowie der entsprechenden Eigenschaft der Vektorfelder $\hat{s}_i$ in (B1).

Damit aber ist das Theorem II. bewiesen.

Es ist natürlich klar, daß es unendlich viele Vektorfelder $\hat{s}$ mit den Eigenschaften 1) .. 3) des Theorems II gibt.

Anhang C

Wir wollen hier zeigen, daß die drei Bedingungen des Satzes 2. im Kapitel 7.1. von einander unabhängig sind.

a) Aus den Bedingungen (1) und (2) folgt nicht (3),

$$\text{denn sei } g_{\kappa}(x) = \frac{1}{1 + i(x^1 - x^0) - x \cdot x} \in C^{\infty}(\mathbb{R}_1^{4(\kappa)}),$$

$$\text{für } g_{\lambda}(y) = \frac{y \cdot y}{y \cdot y + i(y^1 - y^0) - 1} \in C^{\infty}(\mathbb{R}_1^{4(\lambda)}),$$

$$\text{und } g_{\tilde{\kappa}}(z) = \frac{z^1 - z^0}{1 - 2z^0} \in C^{\infty}(\mathbb{R}_1^{4(\tilde{\kappa})}) \text{ sind die Bedingungen (1)}$$

und (2) damit erfüllt, jedoch

$$g_{\tilde{\lambda}}(w) = \frac{w^1 - w^0}{-2w^0 + i w \cdot w} \notin C^0(\mathbb{R}_1^{4(\tilde{\lambda})}).$$

b) Aus den Bedingungen (1) und (3) folgt nicht (2),

$$\text{denn sei } g_{\kappa}(x) = \frac{1}{1 + i(x^0 + x^1) - x \cdot x} \in C^{\infty}(\mathbb{R}_1^{4(\kappa)}), \text{ dann erhält}$$

$$\text{man für } g_{\lambda}(y) = \frac{y \cdot y}{y \cdot y + i(y^0 + y^1) - 1} \in C^{\infty}(\mathbb{R}_1^{4(\lambda)}),$$

$$\text{für } g_{\tilde{\lambda}}(w) = \frac{w^1 - w^0}{1 - 2w^0} \in C^{\infty}(\mathbb{R}_1^{4(\tilde{\lambda})}), \text{ aber für}$$

$$g_{\tilde{\kappa}}(z) = \frac{z^1 - z^0}{1z \cdot z - 2z^0} \notin C^0(\mathbb{R}_1^{4(\tilde{\kappa})}).$$

c) Aus den Bedingungen (2) und (3) folgt nicht (1),

$$\text{denn sei } g_{\kappa}(x) = \frac{x^1 - x^0}{1 - 2x^0} \in C^{\infty}(\mathbb{R}_1^{4(\kappa)}), \text{ dann erhält man}$$

$$\text{für } g_{\tilde{\kappa}}(z) = \frac{1}{i(z^1 - z^0) - (z \cdot z - 1)} \in C^{\infty}(\mathbb{R}_1^{4(\tilde{\kappa})}),$$

$$\text{für } g_{\tilde{\lambda}}(w) = \frac{w \cdot w}{i(w^1 - w^0) - (1 - w \cdot w)} \in C^{\infty}(\mathbb{R}_1^{4(\tilde{\lambda})}), \text{ aber für}$$

$$g_{\lambda}(y) = \frac{y^1 - y^0}{iy \cdot y - 2y^0} \notin C^0(\mathbb{R}_1^{4(\lambda)}).$$

Anhang D

Es wird hier die explizite Gestalt der zusammengesetzten Abbildungen $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, $\alpha, \beta \in Z$ angegeben.

$$\varphi_\kappa \circ \varphi_\lambda^{-1}(y) = \left(\frac{y^0}{y \cdot y}, \frac{y^1}{y \cdot y}, \frac{y^2}{y \cdot y}, \frac{y^3}{y \cdot y} \right)$$

$$\varphi_\kappa \circ \varphi_\kappa^{-1}(z) = \left(1/2 \frac{zz-1}{z^1-z^0}, 1/2 \frac{zz+1}{z^1-z^0}, \frac{z^2}{z^1-z^0}, \frac{z^3}{z^1-z^0} \right)$$

$$\varphi_\kappa \circ \varphi_\lambda^{-1}(w) = \left(1/2 \frac{1-ww}{w^1-w^0}, 1/2 \frac{1+ww}{w^1-w^0}, \frac{w^2}{w^1-w^0}, \frac{w^3}{w^1-w^0} \right)$$

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\kappa^{-1}(x) = \left(\frac{x^0}{x \cdot x}, \frac{x^1}{x \cdot x}, \frac{x^2}{x \cdot x}, \frac{x^3}{x \cdot x} \right)$$

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\kappa^{-1}(z) = \left(1/2 \frac{zz-1}{z^1+z^0}, 1/2 \frac{zz+1}{z^1+z^0}, \frac{z^2}{z^1+z^0}, \frac{z^3}{z^1+z^0} \right)$$

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\lambda^{-1}(w) = \left(1/2 \frac{1-ww}{w^1+w^0}, 1/2 \frac{1+ww}{w^1+w^0}, \frac{w^2}{w^1+w^0}, \frac{w^3}{w^1+w^0} \right)$$

$$\varphi_\kappa \circ \varphi_\kappa^{-1}(x) = \left(1/2 \frac{xx-1}{x^1-x^0}, 1/2 \frac{xx+1}{x^1-x^0}, \frac{x^2}{x^1-x^0}, \frac{x^3}{x^1-x^0} \right)$$

$$\varphi_\kappa \circ \varphi_\lambda^{-1}(y) = \left(1/2 \frac{1-y \cdot y}{y^1-y^0}, 1/2 \frac{1+y \cdot y}{y^1-y^0}, \frac{y^2}{y^1-y^0}, \frac{y^3}{y^1-y^0} \right)$$

$$\varphi_\kappa \circ \varphi_\lambda^{-1}(w) = \left(\frac{w^0}{w \cdot w}, \frac{w^1}{w \cdot w}, \frac{w^2}{w \cdot w}, \frac{w^3}{w \cdot w} \right)$$

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\kappa^{-1}(x) = \left(1/2 \frac{xx-1}{x^1+x^0}, 1/2 \frac{xx+1}{x^1+x^0}, \frac{x^2}{x^1+x^0}, \frac{x^3}{x^1+x^0} \right)$$

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\lambda^{-1}(y) = \left(1/2 \frac{1-y \cdot y}{y^1+y^0}, 1/2 \frac{1+y \cdot y}{y^1+y^0}, \frac{y^2}{y^1+y^0}, \frac{y^3}{y^1+y^0} \right)$$

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\kappa^{-1}(z) = \left(\frac{z^0}{z \cdot z}, \frac{z^1}{z \cdot z}, \frac{z^2}{z \cdot z}, \frac{z^3}{z \cdot z} \right) .$$

Wie man sieht, sind alle Abbildungen $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ auf $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ unendlich oft stetig partiell differenzierbar.

Literaturverzeichnis

- 1) H.A. KASTRUP : Annalen der Physik 2, 388,(1962).
- 2) M. GELL-MANN : Hawai Summer School Lectures (1969).
- 3) B. ZUMINO : Rapporteur's talk in "Proceedings of the XV International Conference on High Energy Physics" Kiev (1970).
- 4) B. ZUMINO : "Proceedings of the Coral Gables Conference"(1971) to be publ.
- 5) "Proceedings of the Symposium on Basic Questions in Elementary Particle Physics" München,Max Planck Institut (1971),to be publ.
- 6) B. ZUMINO : "Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory",Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics,(1970),vol.2,The M.I.T. Press,Cambridge,Mass.
- 7) S. COLEMAN,R. JACKIW : "Why Dilatation Generators don't generate Dilatations" M.I.T. Preprint(Dec. 1970).
- 8) J. ELLIS : Nuclear Physics B 26, 536 (1971).
- 9) H. KLEINERT ; P.H. WEISZ : Cern Preprints TH 1234,1236 (1970).
- 10) H.A. KASTRUP : Physics Letters 3, 78, (1962).
- 11) G. MACK ; A. SALAM : Ann. Phys. 53, 174, (1969).
- 12) J. WESS ; D.J. GROSS : Phys. Rev. D2 , 753 (1970).
- 13) H.A. KASTRUP : Physics Letters 3 , 78 (1962)
Nuclear Physics 58, 561 (1964).
- 14) K. WILSON : Phys. Rev. 179 , 1499 (1969).
- 15) Y. FRISHMAN : Phys. Rev. Lett. 25 , 966 (1970)
"Operator Products at Almost Light-Like Distances"
Weizmann Institute Preprint (1970).
- 16) R. BRANDT : Phys. Rev. D1 , 2808 (1970).
- 17) G. MACK : "The Scaling Law of Electroproduction as a Consequence of Broken Dilatation Symmetry" Trieste Preprint IC/70/95.
- 18) Y. FRISHMAN, V. RITTENBERG, H. RUBINSTEIN, S. YANKIELOWICZ :
Phys. Rev. Lett. 26 , 798 (1971).
- 19) G. ALTARELLI,R. BRANDT,G. PREPARATA : Phys. Rev.Lett. 26,42(1971).
- 20) R. BRANDT,G. PREPARATA: "The Light Cone in Particle Physics"
New York University Techn. Report No. 1/71 Feb. 1971.
- 21) S. CIACARIELLO,R. GATTO,G. SARTORI, M. TONIN : "Equal Time Commutators From Broken Conformal Invariance",IFPTH - 7/70,Padova.
- 22) J. WESS : Nuov. Cim. 18 ,1086 (1960).
- 23) L. CASTELL : Nucl. Physics B 13 , 231 (1969).

- 24) M. FLATO, J. SIMON, D. STERNHEIMER : Ann. Phys. 61,78 (1970).
- 25) H.A. KASTRUP : Phys. Rev. 150 , 1183 (1966).
- 26) A. GAMBA, G. LUZZATO : Nuov. Cim. 33 , 1732 (1964).
- 27) T.H. GO : Dissertationsarbeit München(1971) .
- 28) Siehe Fußnote 35 in Ref. 25).
- 29) S. HELGASON : "Differential Geometry and Symmetric Spaces", Academic Press, New York (1962), p. 218.
- 30) S. HELGASON : wie 29), p. 345.
- 31) H.J. MEISTER : "Einführung in die Theorie der Lie-Gruppen und deren Darstellung im Hilbert-Raum in Hinblick auf Anwendungen in der Elementarteilchen Physik", Skriptum der Universität München, p. 185.
- 32) S. KOBAYASHI, K. NOMIZU : "Foundations of Differential Geometry" Vol.1, Interscience Publ., New York (1963).
- 33) D. HUSEMOLLER : "Fibre Bundles", Mc Graw Hill Book Company, New York (1966), p. 71 .
- 34) L. HÖRMANDER : "Linear Partial Differential Operators", Springer Verlag, Berlin (1963) .
- 35) H.A. KASTRUP, D.H. MAYER : J. Math. Phys. 11, 1041 (1970).
- 36) D.H. MAYER : Diplomarbeit, Universität München (1969).
- 37) J. WOLF : "Spaces of Constant Curvature", Mc Graw Hill Book Company, New York (1967),
- 38) F. HIRZEBRUCH : "Topological Methods in Algebraic Geometry", Third Edition, Springer Verlag, Berlin (1966), p. 183 .

Lebenslauf

Ich wurde am 22. September 1943 als zweiter Sohn von Josef Mayer und seiner Ehefrau Rosalie, geb. Abel, in Freising geboren. Von 1949 bis 1954 besuchte ich die Volksschule in Freising-Neustift, von wo ich an das humanistische Domgymnasium in Freising übertrat. Die Ausbildung dort schloß ich mit dem Abitur im Juli 1963 ab. Im Wintersemester 1963/64 immatrikulierte ich mich an der Universität München für das Fach Physik. Nach Ablegung der Diplomvorprüfung in Physik im Wintersemester 1965/66 fertigte ich unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. H.A. Kastrup die Diplomarbeit "Einige Eigenschaften von Lösungen der Klein-Gordon Gleichung" an und legte im Januar 1969 die Diplom-Hauptprüfung in Physik an der Universität München ab. Seitdem arbeite ich bei Herrn Prof. Dr. H.A. Kastrup als wissenschaftlicher Mitarbeiter auf dem Gebiet der Hochenergie-Physik, mit dem zusammen ich auch eine wissenschaftliche Veröffentlichung durchführte.

